IL SISTEMA DINAMICO DI RÖSSLER

di Carlo Mozetic

Pubblicazione gratuita per la libera distribuzione offerta da:

© OPTELEX - Optical and RF Engineering – Rome (IT)

Diritti riservati – All Rights Reserved – 07/2025

1. Otto Rössler e il suo sistema dinamico non lineare.....2

1.1 Il sistema oscillante con attrattore a singola spirale di Rössler.....3
1.1.1 Teoria del sistema oscillante di Rössler.....6
1.1.2 Implementazione di un circuito oscillante di Rössler.....11
1.1.3 Un circuito oscillante caotico simile a quello di Rössler.....15

2. Evoluzione del sistema dinamico di Rössler.....24

2.1 Il sistema oscillante di Rössler generalizzato (o GRS).....28
2.1.1 Due semplici oscillatori caotici simil-Rössler.....38
2.1.2 Oscillatore ipercaotico con una linea di trasmissione CPLM.....47
2.1.3 Analogie fra un GRS e il sistema ipercaotico con linea CPLM.....64

RIFERIMENTI E BIBLIOGRAFIA.....69

1. Otto Rössler e il suo sistema dinamico non lineare

Le resistenze negative non lineari sono state ampiamente utilizzate per realizzare e sperimentare particolari circuiti oscillanti che simulano comportamenti caotici, ad esempio il circuito di Leon Chua che è stato presentato per la prima volta nel 1983 dall'omonimo inventore, un Professore di Ingegneria Elettrica e di Scienze dei Computer dell'Università di Berkeley in California.

Leon Ong Chua (1936, Filippine)

Il circuito di Chua fu uno dei primi oscillatori non periodici che sia mai stato realizzato con dei componenti elettronici standard, attivi e passivi. La parte attiva serve per realizzare il diodo non lineare a resistenza negativa (il diodo di Chua), mentre la parte passiva è dedicata all'innesco e al sostentamento dell'oscillazione non periodica che determina ai capi di uscita un inviluppo caotico molto particolare osservabile sia in ambiente simulato, o con metodi analitici su 2 o 3 dimensioni, sia attraverso un comune oscilloscopio da laboratorio.

Con gli stessi presupposti ma con equazioni diverse sono stati realizzati successivamente altri circuiti oscillanti elettronici non periodici che simulano i sistemi caotici studiati da Lorenz nel 1963 e da Rössler nel 1976, tuttavia come vedremo per motivi di complessità tali implementazioni necessitano anche di moltiplicatori analogici a quattro quadranti anziché solo dei semplici amplificatori operazionali. Inoltre è importante ricordare che, sebbene il circuito di Chua sia stato sviluppato dall'omonimo autore, i circuiti di Lorenz e di Rössler sono stati sviluppati successivamente e da autori diversi perché Lorenz era un matematico e meteorologo mentre Rössler era un biochimico, pertanto essi non avrebbe-

ro mai avuto le capacità tecniche per sviluppare i circuiti elettronici che simulassero i comportamenti di tali sistemi caotici dei quali loro avevano studiato solo l'aspetto teorico. Tuttavia dimostreremo anche che è possibile realizzare oscillatori non periodici con attrattore a singola spirale, quindi con un comportamento simile a quello teorizzato da Rössler, utilizzando solo qualche circuito integrato e pochissimi altri componenti. Oggi i sistemi dinamici non lineari (caotici) vengono utilizzati principalmente per la crittografia dei dati sensibili nelle trasmissioni end-to-end, per lo studio e la previsione dei cambiamenti atmosferici e climatici, per lo sviluppo dei sistemi di apprendimento legati all'intelligenza artificiale e infine per agevolare l'implementazione e l'interconnessione di sofisticate reti neurali auto-adattative.

Otto Rössler (1940, Germania)

1.1 Il sistema oscillante con attrattore a singola spirale di Rössler

Nell'ambito delle teorie sui sistemi dinamici Lorenz fu un precursore con la sua famosa “farfalla” di cui non è ancora chiaro quale fu la sua origine, se legata al titolo di presentazione della sua famosa conferenza del 1972 oppure se determinato dal suo esempio di sistema caotico; in seguito fu il matematico francese René Thom ad anticipare, con la teoria delle catastrofi (Thom, 1975), l’importanza che assumono i punti di transizione tra diverse configurazioni di equilibrio, punti che verranno poi successivamente indicati come “biforcazioni”. Analogo a quello di Lorenz è l’attrattore “strano” presentato da Rössler attraverso un articolo di due paginette pubblicato nel 1976 su “Phisic Letters” (Volume 57A, numero 5) dal nome “An equation for continuous caos”; l’attrattore è caratterizzato da un sistema di equazioni

differenziali non lineari derivate dalle equazioni di Navier-Stokes che descrivono, almeno in questo caso, la cinematica delle reazioni chimiche.

Nella cinematica chimica Rössler ha anche voluto precisare il concetto di “attrattore strano": trattasi di un'orbita qualsiasi nella quale si viene a posizionare un sistema caotico. A Otto Rössler è stato conferito il titolo di Professore honoris-causa e Dottore in medicina honoris-causa; egli è stato anche un noto ricercatore nell'ambito della "Teoria del Caos" ma fu anche professore di Biochimica Teorica. Ha studiato medicina all'Università Eberhard-Karls, dove ha scritto la sua tesi di dottorato sulla tolleranza immunologica. Nel 1967 ha lavorato come ricercatore in biologia cibernetica presso l'Istituto Max Planck (Seewiesen), nel campo della psicologia comportamentale. Un anno dopo fu invitato da Bob Rosen a lavorare come professore residente presso il Center for Theoretical Biology, la State University di New York a Buffalo. Nel 1973 tornò a Tubinga dove riprese gli studi di Biochimica teorica e sei anni dopo occupò la cattedra in questa materia.

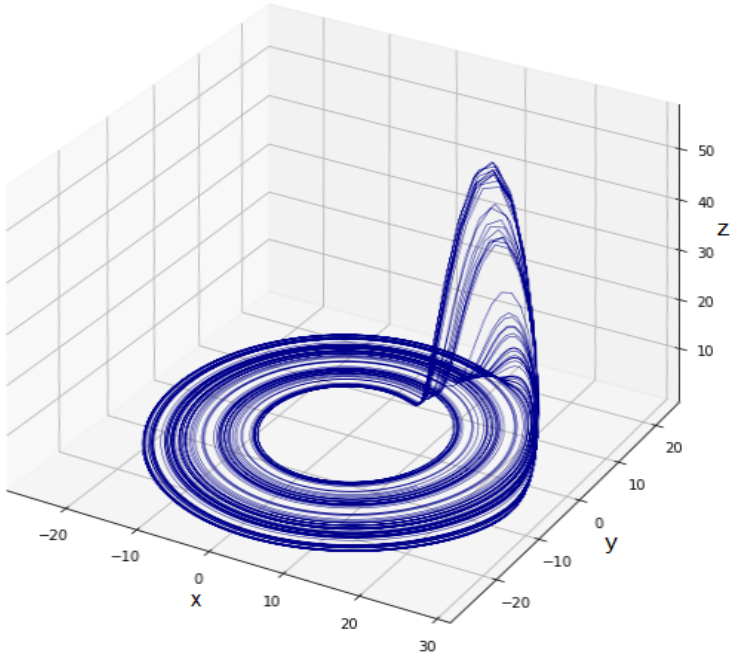

Fig.1.1.1 Una immagine in 3D del sistema a singolo attrattore di Rössler

Otto Rössler fu anche Visiting Professor in Matematica a Guelph (1981), in Teoria del Caos a Los Alamos (1983), in Fisica Teorica a Lyngby (1990), in Ingegneria di Processo a Charlottesville (1993) e in Belle Arti Applicate a Vienna (1996). I suoi articoli e documenti sono stati pubblicati e ampiamente diffusi in tutto il mondo. Ha scritto una decina di libri, tra cui “Das Flammenschwert” (La spada fiammeggiante - 1996) e “Lampsacus” (1989).

Otto Rössler ha sviluppato il suo sistema per scopi puramente teorici, ma quelle equazioni si sono dimostrate utili anche per modellare l'equilibrio in alcune reazioni chimiche. L'articolo originale di Rössler afferma che il suo sistema è nato per funzionare in modo simile al sistema di Lorenz, ma anche per essere un sistema caotico più semplice da analizzare, infatti ha soltanto un attrattore a singola spirale. Alcune proprietà del sistema di Rössler sono dedotte da metodi lineari e autovettori, ma le caratteristiche principali di questo sistema richiedono metodi non lineari come le sezioni di Poincaré e/o i diagrammi di biforcazione. Quanto sia “strano” l'attrattore di Rössler lo si lascia giudicare ai lettori, tuttavia esso è già stato preso come esempio architettonico per realizzare moderne strutture svettanti verso il cielo, non soltanto per la sua forma omoclina ma anche per la sua somiglianza con una delle tante rappresentazioni del nastro di Möbius, ovvero di costituire un esempio di superficie non orientabile scoperta nel 1858 dall'omonimo matematico tedesco.

L'obiettivo di questo articolo è focalizzato invece sulla possibilità di simulare il comportamento del sistema caotico di Rössler attraverso un circuito elettrico oscillante che impiega resistenze o conduttanze negative; non saranno immediatamente percepibili elementi elettrici specifici che presentano tali caratteristiche, nei casi analizzati la resistenza negativa che rende il circuito instabile è già insita nel sistema stesso attraverso l'uso di uno o più feedback; il circuito che replica la funzione caotica di Rössler è relativamente più complesso rispetto a quello di Chua, ma, dal punto di vista didattico, offre una maggiore flessibilità nell'interagire con esso allo scopo di osservare ogni possibile comportamento singolare di questo interessante sistema caotico. L'articolo prosegue con l'analisi di un ulteriore approfondimento sui sistemi oscillanti di Rössler “generalizzati” o GRS (Generalized Rössler Systems) e un altro sistema caotico riconducibile a un GRS.

1.1.1 Teoria del sistema oscillante di Rössler

L'attrattore di Rössler è associato a un sistema composto da tre equazioni differenziali l'ultima delle quali non è lineare; tali equazioni determinano un sistema dinamico tridimensionale continuo che presenta caratteristiche caotiche le cui traiettorie a lungo termine definiscono un attrattore "strano" avente proprietà frattali. Le equazioni di tale sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \qquad [1]$$

in cui a, b, e c sono i parametri; in origine Rössler aveva studiato l'attrattore per $a = 0{,}2$, $b = 0{,}2$ e $c = 5{,}7$, tuttavia oggi le proprietà di tale sistema con $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$ e $c = 14$ sono quelle più studiate; un'altra linea di parametri è poi stata presa in considerazione dopo un'attenta analisi topologica dell'attrattore in cui si considera $b = 2$, $c = 4$ mentre a viene scelto come parametro di biforcazione, ovvero adottando la stessa tecnica solitamente utilizzata nello studio del sistema caotico e ipercaotico di Lorenz, modulato con una sinusoide.

Uno degli aspetti interessanti del sistema di Rössler è la caratteristica lineare di due delle sue equazioni ponendo $z = 0$ e ottenendo quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \qquad [2]$$

in questo modo è possibile analizzare l'attrattore anche attraverso la sua proiezione sul piano x, y. La stabilità su questo piano è possibile trovarla calcolando gli autovalori della matrice jacobiana:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad [3]$$

che corrispondono a $\left(\pm a\sqrt{a^2-4}\right)/2$. Da ciò possiamo intuire che quando $0<a<2$, gli autovalori sono complessi ed entrambi hanno una componente reale positiva, rendendo l'origine instabile con la spirale verso l'esterno sul piano x, y . Consideriamo ora il comportamento del piano z nell'ambito di tale intervallo per a ; finché $x<c$ quest'ultimo termine manterrà l'orbita vicino al piano. Appena l'orbita supera un valore in cui $x \geqslant c$, i valori di z iniziano a salire velocemente; man mano che si sale, però, il termine $-z$ nella derivata della prima equazione dx/dt arresta la crescita in x . Questo meccanismo è ciclico e si ripete all'infinito ma spesso con modalità caotiche e ciò dipende dai parametri impostati.

Nel sistema di Rössler si contano n.2 punti fissi, il primo si trova al centro della spirale e il secondo si trova completamente fuori dalla spirale stessa; per trovare tali punti le tre equazioni del sistema devono essere forzate a zero e le tre coordinate (x, y, z) di ciascun punto saranno così individuate risolvendo la rispettiva equazione. Ecco quindi le equazioni che servono per determinare tali punti:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2} \\ y=-\left(c\pm\dfrac{\sqrt{c^2-4ab}}{2a}\right) \\ z=\dfrac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a} \end{cases} \qquad [4]$$

il risultato fornisce il seguente set di informazioni:

$$\left(\frac{c+\sqrt{c^2-4ab}}{2},\quad \frac{-c-\sqrt{c^2-4ab}}{2a},\quad \frac{c+\sqrt{c^2-4ab}}{2a}\right)=(x_1, y_1, z_1)$$
$$\left(\frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2},\quad \frac{-c+\sqrt{c^2-4ab}}{2a},\quad \frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2a}\right)=(x_2, y_2, z_2)$$

La stabilità di questi due punti fissi può essere analizzata attraverso i rispettivi autovalori e autovettori mediante la seguente matrice jacobiana:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x-c \end{bmatrix} \qquad [5]$$

i cui autovalori determinano come soluzione la seguente cubica:

$$-\lambda^3+\lambda^2(a+x-c)+\lambda(ac-ax-1-z)+x-c+az=0 \quad [6]$$

in base a quest'ultima equazione si ricavano gli autovalori di entrambi i punti fissi sostituendo ad a, b, e c i valori corrispondenti. Gli autovalori sono numeri complessi che possono essere sia positivi che negativi: se sono negativi essi caratterizzano il livello di "attrazione" lungo l'autovettore corrispondente, se invece essi sono positivi ne determinano il livello di "repulsione".

Supponiamo ora di mantenere fissi b e c e di variare solo a ; anzi, mettiamoci nelle condizioni in cui Rössler studiava il suo attrattore e cioè con $b=0,2$ e $c=5,7$. Variando a otteniamo le seguenti condizioni:

- con $a\leq 0$ l'eventuale evoluzione iniziale converge verso il punto fisso centrale, quello che si trova al centro della spirale;
- con $a=0,1$ si ottiene un singolo ciclo limite dal periodo 1;
- con $a=0,2$ ci troviamo esattamente nelle stesse condizioni in cui Rössler studiava il suo attrattore caotico (massima estensione di x);
- con $a=0,3$ si ottiene un attrattore caotico in cui molti cicli ricadono su se stessi formando un nastro di Möbius;
- con $a=0,35..0,38..ecc.$ si ottiene un attrattore simile a quello in cui $a=0,3$ ma sempre più caotico e confuso.

Proviamo ora invece a mantenere fissi a e c , ponendo $a=0,2$ e $c=5,7$ e variare soltanto b ; a differenza di ciò che accade variando a e c la variazione di b determina numerose situazioni in cui le orbite si richiudono a ciclo chiuso e non presentano un comportamento caotico. Man mano che b diminuisce si passa da un'orbita a ciclo singolo a una vasta zona a ciclo doppio, ovvero una spirale dal ciclo esterno che si richiude in quello interno ogni volta nello stesso punto; dopodiché si passa a una spirale formata n.4 orbite alla quale segue un ampio profilo caotico che si

estende fino a quando b è di poco inferiore a 0,4. Quando $b \approx 0{,}2$ ci si ritrova nella condizione in cui x presenta la sua massima estensione, per poi richiudersi verso l'alto, vedi fig.1.1.2, ovvero la zona di maggior interesse per Rössler. Rispetto agli altri parametri, la variazione di b determina un maggior intervallo in cui le orbite hanno un periodo=3 e un periodo=6.

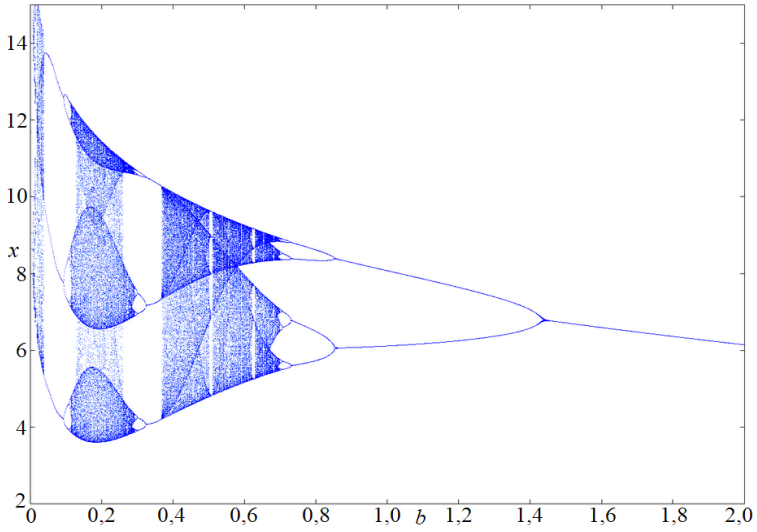

Fig.1.1.2 Diagramma delle biforcazioni al variare di b

Facciamo ora l'ipotesi di mantenere costanti a e b e di variare c, poniamo ad esempio $a=b=0{,}1$; in questo caso il diagramma delle biforcazioni inizialmente è periodico ma diventa rapidamente caotico all'aumentare di c . E questo comportamento è ripetitivo all'aumentare di c , con sezioni di periodicità intervallate da periodi di caos, e la tendenza è verso periodi di orbite più alte man mano che c aumenta. Lo schema che segue identifica il comportamento del sistema al variare di c , vedi fig.1.1.3:

- $c=4 \Rightarrow$ orbita di periodo=1;
- $c=6 \Rightarrow$ orbita di periodo=2;
- $c=8{,}5 \Rightarrow$ orbita di periodo=4;
- $c=8{,}7 \Rightarrow$ orbita di periodo=8;
- $c=9 \Rightarrow$ periodo leggermente caotico;
- $c=12 \Rightarrow$ orbita di periodo=3;

- $c=12{,}6 \Rightarrow$ orbita di periodo=6;
- $c=13 \Rightarrow$ periodo leggermente caotico;
- $c=15{,}4 \Rightarrow$ orbita di periodo=5;
- $c=18 \Rightarrow$ attrattore caotico completamente riempito.

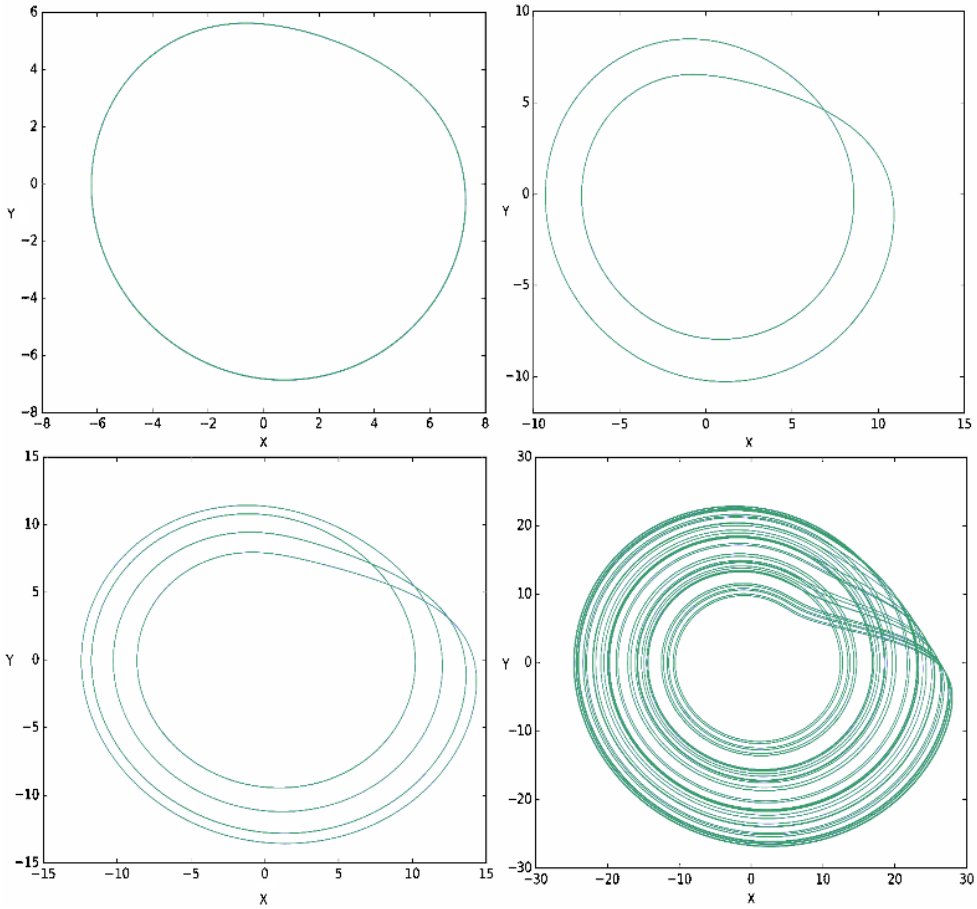

Fig.1.1.3 Analisi della proiezione sul piano x, y dell'attrattore di Rössler: con a=b=0,1 da sinistra a destra e dall'alto in basso abbiamo: c=4 periodo=1, c=6 periodo=2, c=8,5 periodo=4 e c=18 (caotico)

Il lettore osservi come aumentano i valori di x e di y all'aumentare di c, nonostante i valori di a e di b siano contenuti; tale informazione ci servirà per scalare correttamente il sistema per renderlo compatibile

con un circuito elettrico. Considerando infatti il sistema in [1] i parametri b e c sono quelli che interagiscono solo sulla terza equazione differenziale, quella più "delicata" dal punto di vista della compatibilità con le dinamiche offerte oggi dagli amplificatori operazionali.

1.1.2 Implementazione di un circuito oscillante di Rössler

A differenza del circuito che simula il comportamento del sistema di Lorenz quello che svolge lo stesso compito col sistema di Rössler non è affatto semplice da compattare; anzi, poiché la proiezione dell'attrattore di Rössler sul piano non offre la stessa profondità visiva di quello di Lorenz, è necessario aggiungere un piccolo circuito ausiliario (un ingegnoso trucco) per poter osservare meglio l'attrattore in un formato 3D virtuale.

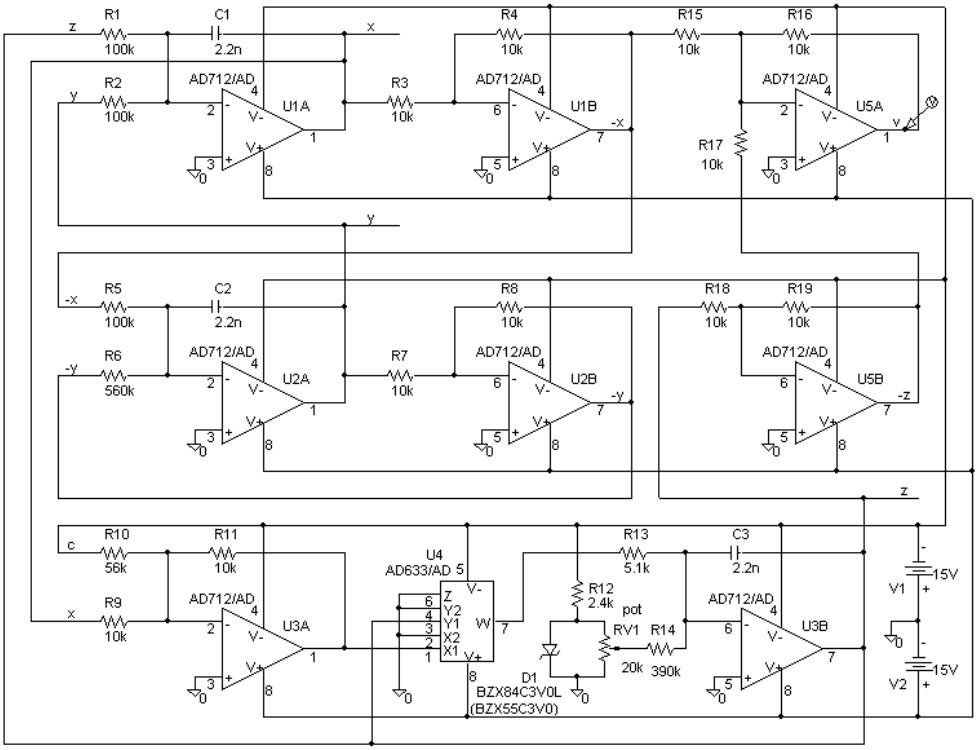

Fig.1.1.4 Schema elettrico del circuito di Rössler

Il circuito in questione è riportato integralmente in fig.1.1.4; lo schema è stato realizzato a matrice per comprendere meglio il ruolo di ogni singolo stadio. A parte U5A e U5B, che servono esclusivamente per la rappresentazione dell'attrattore in 3D, il resto degli stadi sono tutti indispensabili per simulare il comportamento delle tre equazioni che compongono il sistema di Rössler, in particolare quelli posti in alto servono per determinare la prima equazione, quelli sulla riga intermedia determinano la seconda, e infine quelli disposti sulla riga in basso determinano la terza equazione per cui è previsto l'unico stadio moltiplicatore. Il parametro a è determinato da R6, il parametro b è quello variabile determinato da RV1, mentre il parametro c è determinato da R10; naturalmente onde poter evitare la saturazione degli operazionali tali parametri sono stati così scalati:

$$a=\frac{R5}{R6}=\frac{100\times10^{3}}{560\times10^{3}}\simeq0{,}18 \qquad [7]$$

$$b=-\left(\frac{1}{2}V_{D1}\right)\left(\frac{R13}{R14+\frac{RV1}{2}}\right)\simeq0{,}019 \quad \text{(con RV1 a metà corsa)} \quad [8]$$

$$c=-\frac{R11}{R10}V_{R10}=-\frac{10\times10^{3}}{56\times10^{3}}\times-15\simeq2{,}67 \qquad [9]$$

Dove V_{D1} è la tensione ai capi del diodo zener (3V). La polarità delle tensioni V_{D1} e V_{R10} sono entrambe negative perché lo stadio che segue è uno stadio invertente. Con questi numeri è evidente che il parametro a non è scalato perché il suo valore è prossimo a quello contemplato da Rössler; b invece è stato scalato di un fattore di circa 10, e comunque rimane regolabile, mentre c è scalato di un fattore di circa 2 rispetto al valore su cui Rössler indagava. Per sfruttare la massima dinamica che offrono gli operazionali alimentati con ±15V non si poteva fare di meglio, d'altra parte i limiti per evitare la soglia della saturazione dipendono prevalentemente da b e da c ; i margini operativi di RV1 sono limitati fra il 20% e l'80%, oltre questi limiti il circuito oscillante tende a spegnersi o per mancanza di energia o per saturazione, effetto questo che si può iniziare ad osservare sull'asse z riducendo il valore di RV1 appena sotto al 20%.

Inoltre va aggiunto un dettaglio: mentre la tendenza al “caos” aumenta all'aumentare di c, per quanto riguarda b è esattamente il contrario, più diminuisce e più si manifestano modalità caotiche, vedi il diagramma delle biforcazioni in fig.1.1.2; tuttavia, poiché c è già stato ampiamente scalato, qualora si volesse variare questo parametro conviene aumentarlo anziché diminuirlo riducendo il valore di R10, ma senza esagerare. In questo caso vale la pena compensare eventuali sforamenti dinamici sull'asse z che raggiungono e tendono a superare i 14V agendo su RV1, aumentando così il valore di b. In effetti, osservando singolarmente le tre variabili in funzione del tempo ci si accorge che nel circuito di Rössler la variabile z ha solo dei picchi positivi e con una elevata dinamica, vedi fig.1.1.5, e ciò dipende dalla presenza del moltiplicatore necessario per risolvere la terza equazione del sistema.

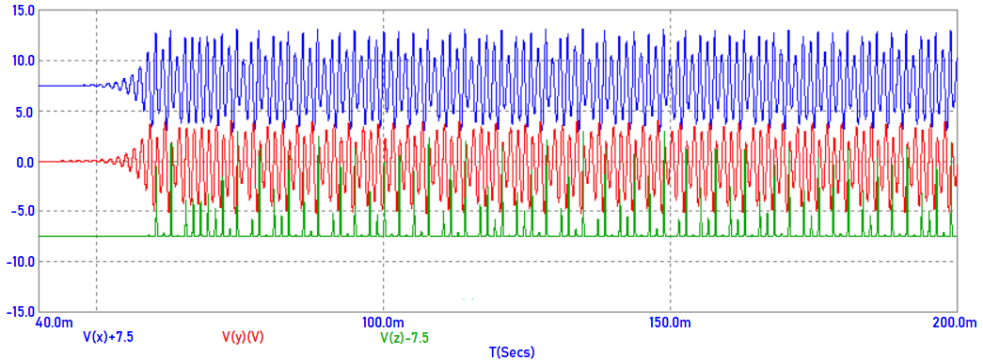

Fig.1.1.5 Andamenti temporali delle variabili x, y e z nel circuito di Rössler

Una dinamica così elevata è quasi sempre incompatibile con dei circuiti analogici, tuttavia in questo caso sono stati ottenuti dei validi compromessi che consentono di osservare comunque il comportamento del sistema di Rössler utilizzando un semplice oscilloscopio. A questo proposito si ricorda che U5A e U5B non hanno una partecipazione attiva nell'elaborazione del sistema: U5B serve per invertire z mentre U5A miscela fra loro $-x$ e $-z$ onde ottenere il segnale v da applicare sull'asse y dell'oscilloscopio allo scopo di ottenere una rappresentazione 3D virtuale; in questo caso però l'asse x dell'oscilloscopio andrà collegato all'uscita “y”. Si ricorda che anche in questo caso il circuito è interamente accoppiato in continua e prevede numerosi feedback, qualsiasi piccola tensione di offset prodotta dal

moltiplicatore o da qualsiasi operazionale potrebbe incidere sulla funzionalità dell'intero circuito; tuttavia, a differenza di quello di Lorenz, qualora il moltiplicatore dovesse presentare una piccola tensione di offset sulla sua porta di uscita, essa non ha bisogno di alcuna correzione in quanto esiste già RV1 in grado di compensarla in caso di necessità.

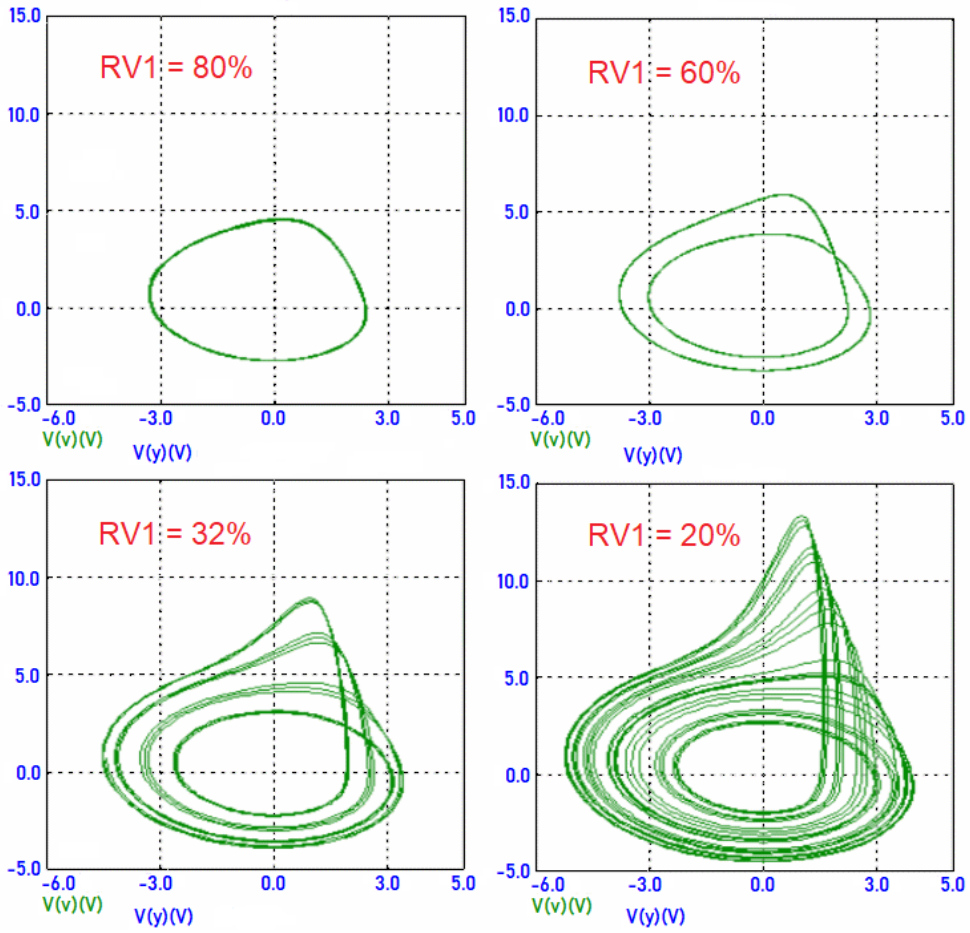

Fig.1.1.6 Vista in 3D di alcune rappresentazioni ottenute con il circuito di fig.1.1.4 che riproduce l'attrattore di Rössler in un ambiente Spice

Il moltiplicatore è un classico AD633 della Analog Device, mentre per gli operazionali si suggerisce di utilizzare gli AD712, un modello di integrato

contenente due op-amp di precisione con ingressi a FET. Si raccomanda di collegare fra la massa e ciascun pin di alimentazione dei vari integrati un condensatore di decoupling da 100nF; inoltre è consigliato anche l'utilizzo di n.2 condensatori da almeno 1µF fra la massa e i due ingressi di alimentazione per filtrare eventuali disturbi captati dai cavi.

1.1.3 Un circuito oscillante caotico simile a quello di Rössler

Indubbiamente nel corso degli anni il sistema di Rössler è stato uno di quelli più studiati ma anche più rielaborati in forme diverse per via della sua semplicità dal punto di vista analitico; purtroppo però questa eccessiva pratica di voler rielaborare i classici sistemi dinamici non lineari, peraltro ampiamente diffusa nei vari ambienti di ricerca sparsi per tutto il mondo, ha causato una certa confusione al punto che oggi non è poi così difficile trovare riferimenti errati su questo argomento o quanto meno discutibili. In questo contesto si inserisce il lavoro di A. S. Elwalkil, di M. P. Kennedy, ma anche quello di T. L. Carroll che ha saputo sintetizzare il prezioso lavoro dei primi due realizzando così l'oscillatore che sarà presentato in questo paragrafo, e che però già più volte è stato indicato erroneamente come l'esempio pratico del sistema di Rössler pur non essendo dotato del moltiplicatore necessario per integrare la terza equazione differenziale non lineare.

Vediamo ora il ragionamento di Elwalkil-Kennedy in merito al sistema di Rössler: si consideri un classico sistema di Rössler che viene descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z & \text{[1a]} \\ \dot{y} = x + ay & \text{[1b]} \\ \dot{z} = b + z(x - c) & \text{[1c]} \end{cases}$$

in cui a, b, e c sono i parametri (costanti); il termine non lineare appare solo nella [1c] ovvero il prodotto $x\,z$. La dinamica della [1] nel piano x, y è data da:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{[2]}$$

Si ricorda che un generico oscillatore sinusoidale del secondo ordine è descritto con la seguente espressione a matrici:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \qquad [3a]$$

la cui condizione di oscillazione e la sua frequenza naturale, nei termini di velocità angolare è data da:

$$a_{11}+a_{22}=0 \quad \text{e} \quad \omega_0=\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad [3b]$$

nel caso particolare in cui $a_{11}=a_{22}=0$ l'oscillatore sinusoidale è anche conosciuto come “oscillatore in quadratura a doppio anello integrato”. Ora, comparando la [2] con la [3a] è evidente che, con $a=0$, la dinamica del sistema di Rössler nel piano $x\,,y$ equivale a quella di un oscillatore in quadratura; la costante a è spesso identificata con ε (fattore di errore), dato che, in pratica, esso deve essere posto leggermente sopra allo zero per innescare l'oscillazione, ovvero serve per posizionare la coppia di autovalori complessi coniugati sulla metà destra del piano. Naturalmente è necessario avere un meccanismo di controllo del livello del segnale per stabilizzare l'ampiezza all'uscita dell'oscillatore, di solito si usa la non-linearità di un operazionale in condizioni di saturazione per tale proposito. Per dimostrare che il sistema caotico espresso in [1] richiede un generico oscillatore sinusoidale nel piano $x\,,y$ si considerino le seguenti quattro matrici che fra loro sono dinamicamente equivalenti:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & a\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & a\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}a & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad [4]$$

adottando i valori $(a\,,b\,,c)=(0{,}36\,,0{,}4\,,5{,}7)$ per i tre parametri della [1] è possibile osservare la proiezione sul piano $x\,,y$ dell'attrattore di Rössler per ciascuna delle sue quattro immagini speculari. Si noti che, mentre le variabili di stato $x\,,y$ rappresentano un'entità singola (un oscillatore in quadratura), il termine $-z$ appare nella [1a] ma potrebbe apparire invece anche nella [1b]; ciò significa che le derivate, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ possono es-

sere utilizzate entrambe per indicare variazioni in direzione dell'asse z . In genere l'ampiezza di queste variazioni può essere aumentata o diminuita attraverso un fattore di moltiplicazione m che è costante, per questo motivo talvolta la variabile $-z$ viene genericamente indicata come $-mz$.

A questo punto possiamo dire che l'equazione [1c] si può considerare come un sottosistema separato non-lineare che è legato alla dinamica nel piano x, y attraverso la variabile x ; tale sistema non lineare funziona in modo molto simile a quello basato su un dispositivo "a soglia". Quando l'ampiezza di x è sufficientemente bassa il termine $-cz$ domina il termine non lineare $(b+z)x$, vedi [1c]; pertanto, trascurando l'effetto di tale termine non lineare, si può dimostrare che z è scalabile con e^{-ct} e ciò indica che l'ampiezza del segnale z si riduce rapidamente nel tempo. In tale situazione la dinamica nel piano x, y è dominata da quella di un oscillatore sinusoidale (il termine $-z$ nella [1a] è molto piccolo e può essere trascurato); ciò consente all'oscillazione sinusoidale di crescere velocemente (switch-off). Ma quando l'ampiezza di x supera un certo limite il termine non lineare non può più essere trascurato e la sua attivazione (switch-on) crea improvvise impennate sull'ampiezza del segnale z che prima o poi costringono il segnale x a diminuire nuovamente riducendo il valore di z e così il ciclo si ripete. Questi incrementi improvvisi di z quando il termine si attiva mettono in evidenza il fatto che la maggior parte dell'energia immagazzinata nell'oscillatore sinusoidale viene assorbita ciclicamente dal termine non lineare attraverso degli impulsi governati dal parametro b che controllano questo trasferimento di energia; piccoli valori di b consentono di accumulare più energia nell'oscillatore che si potrebbe espandere fino ad arrivare addirittura a saturare gli operazionali se il termine non lineare non riuscisse ad attivarsi in tempo utile per contenerla: viceversa se b fosse troppo grande la dissipazione sarebbe così incisiva da spegnere l'oscillatore. Una volta capito questo meccanismo nel sistema di Rössler si può pensare di proporre un'alternativa al termine non lineare $(b+z)x$ attraverso l'introduzione di un termine non lineare che però sia indipendente da z , ad esempio il termine $(b+x)y$, oppure col termine $(b+y)x$ che mostrerebbero risultati simili in entrambi i casi, vedi fig.1.1.7; ma prima vediamo cosa accade da un punto di vista analitico.

La proposta alternativa di Elwalkil-Kennedy è quella di sostituire la non-linearità del sistema di Rössler, che è di tipo "moltiplicativo", con una non-linearità di tipo "switching", ad esempio quella tipica di un diodo. Pertanto il sottoinsieme non lineare della [1c] andrebbe sostituito con:

$$\dot{z} = -cz + bx \qquad [5a]$$

dove sia b che c è un termine di switching che è dato da:

$$(b \vee c) = \begin{cases} \alpha_1 \Rightarrow se: f(x,y) \geq 1 \\ \alpha_2 \Rightarrow se: f(x,y) < 1 \end{cases} \qquad [5b]$$

il carattere "v" al centro fra b e c rappresenta un "or" logico.

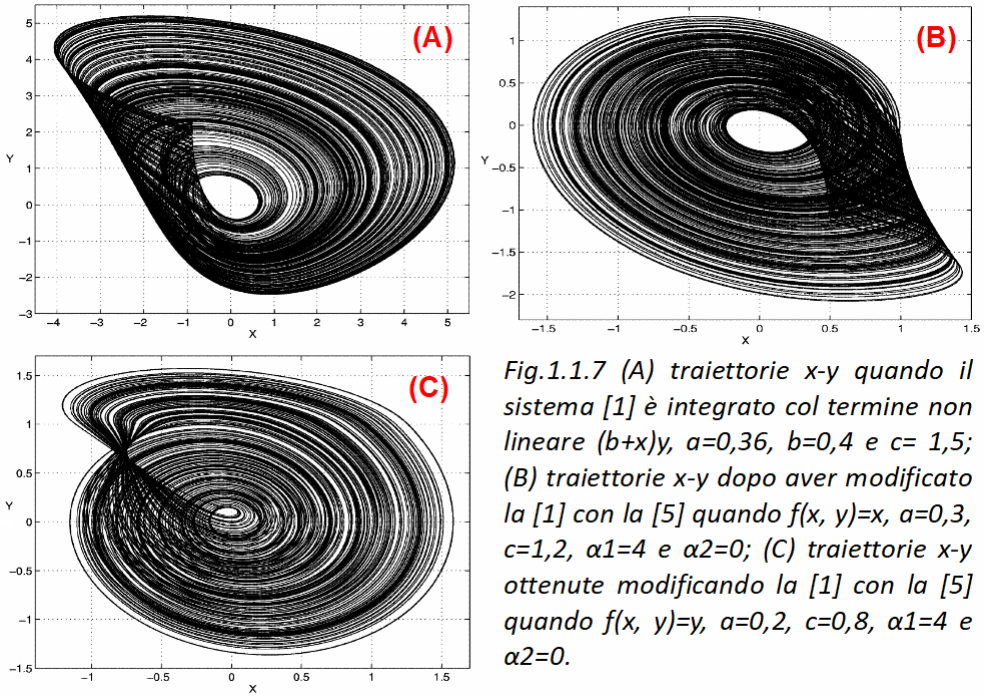

Fig.1.1.7 (A) traiettorie x-y quando il sistema [1] è integrato col termine non lineare (b+x)y, a=0,36, b=0,4 e c= 1,5; (B) traiettorie x-y dopo aver modificato la [1] con la [5] quando f(x, y)=x, a=0,3, c=1,2, α1=4 e α2=0; (C) traiettorie x-y ottenute modificando la [1] con la [5] quando f(x, y)=y, a=0,2, c=0,8, α1=4 e α2=0.

Per questa analisi sono stati identificati due casi possibili, $f(x,y)=x$ e $f(x,y)=y$; le traiettorie corrispondenti sono mostrate rispettivamente in fig.1.1.7(B) e in fig.1.1.7(C). Una traiettoria simile a quella mostrata in fig.1.1.7(B) può essere ottenuta anche con a=0,7, b=1 e c dato dalla [5b] con $f(x,y)=x$, α1=0 e α2=2. Inoltre, tale regime caotico persiste anche

stressando le dinamiche sul piano x, y ripetendo lo stesso comportamento per una qualsiasi delle matrici riportate nella [4].

Il sistema di Rössler, così modificato, può essere descritto come:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad [6]$$

dove b o c sono definiti dalla [5b].

Analogamente a quanto era già stato sostenuto per il sistema oscillante a FDNR anche in questo caso il sistema ha due punti di equilibrio: nel caso della fig.1.1.7(B) il primo punto di equilibrio è reale ed è allocato all'origine, nella regione dove $f(x, y) < 1$ ed è instabile perché ha come autovalori (-1,2, 0,15±j0,9887); il secondo punto di equilibrio, invece è virtuale e si trova nella regione dove $f(x, y) \geq 1$ ed è stabile perché ha come autovalori (0, -0,45±j2,1065). Per quanto riguarda invece la fig.1.1.7(C) i due autovalori corrispondenti sono: (-0,8, 0,1±j0,995) e (0, -0,3±j2,1794), rispettivamente. Queste dinamiche qualitative sono molto simili a quelle del sistema oscillante a FDNR, ma sono anche quelle tipiche di un oscillatore caotico stile Colpitts del terzo ordine.

Infine si può dire che la [6] può essere scritta anche nella forma:

$$\dddot{x} = -\left[(c-a)\ddot{x} + (1+b-ac)\dot{x} + (c-ab)x\right] \qquad [7]$$

dove b o c sono definiti dalla [5b] con $f(x, y) = f(x, \dot{x})$; eventualmente imponendo la condizione $c - a = 1$, e per valori di a sufficientemente piccoli tali che $a^2 \ll 1$ la [7] si semplificherebbe nel seguente sistema a due parametri:

$$\dddot{x} = -\left[\ddot{x} + (1-a+b)\dot{x} + (1+a-ab)x\right] \qquad [8]$$

Questo sistema acquisisce la dinamica del sistema di Rössler modificato che si possono osservare in fig.1.1.8(A) e (B) che rappresentano rispettiva-

mente le traiettorie $x, \dot{x}$ nei due casi, $f(x, \dot{x}) = \dot{x}$ e $f(x, \dot{x}) = x$. La fig.1.1.8(A) è stata ottenuta con *a*=0,5, α1=5 e α2=0; invece la fig.1.1.8(B) è stata ottenuta decrementando il valore di *a* e portandolo al valore di 0,2. È interessante notare che anche la seguente equazione acquisisce la dinamica della [7]:

$$\dddot{x} = -(\ddot{x} + b\dot{x} + x) \qquad [9]$$

dove b è sempre definito dalla [5b], ma in questo caso α1 è utilizzato come parametro di biforcazione. Per completezza in fig.1.1.8(C) sono rappresentate le traiettorie $x, \dot{x}$ integrando la [9] con α1=5 e α2=0; è particolarmente evidente la somiglianza fra le traiettorie di fig.1.1.8(A) e (C).

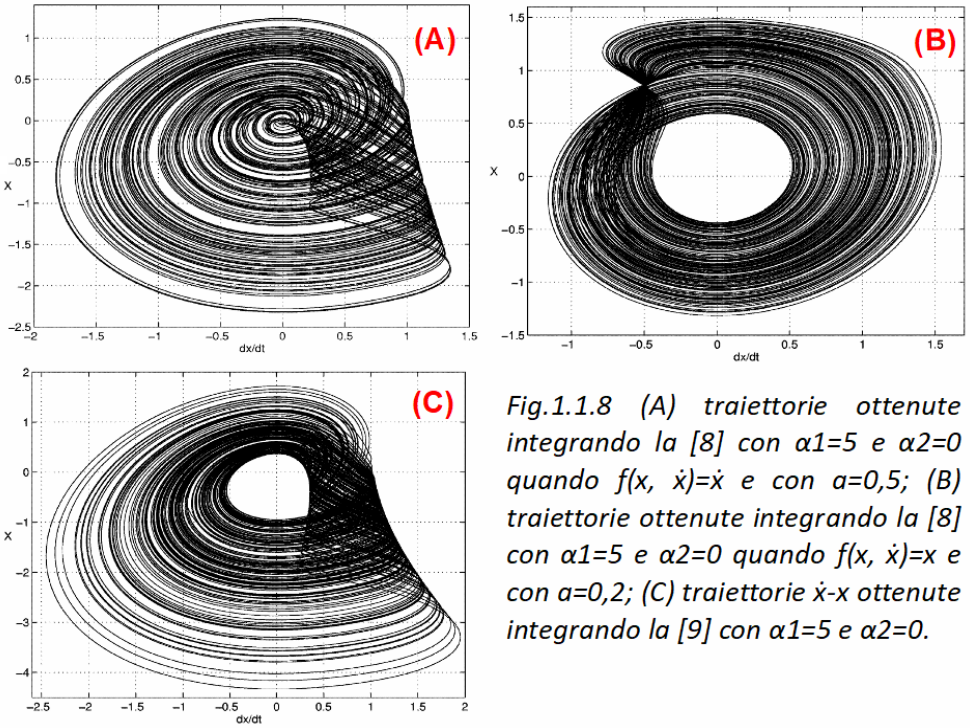

Fig.1.1.8 (A) traiettorie ottenute integrando la [8] con α1=5 e α2=0 quando f(x, ẋ)=ẋ e con a=0,5; (B) traiettorie ottenute integrando la [8] con α1=5 e α2=0 quando f(x, ẋ)=x e con a=0,2; (C) traiettorie ẋ-x ottenute integrando la [9] con α1=5 e α2=0.

Se dal punto di vista analitico la modifica di Elwalkil-Kennedy può avere un senso, ovvero di eliminare il moltiplicatore e utilizzare al suo posto uno switch non lineare, dal punto di vista pratico tale operazione non è proprio così semplice da implementare; in molti ci hanno provato a "tradurre" in pratica questo concetto ma soltanto Thomas Carroll nel 2004 ha ottenuto

un risultato abbastanza dignitoso. Carroll ha dovuto scalare i valori per non saturare gli operazionali e a tale proposito ha utilizzato il parametro "*r*" che rappresenta un fattore moltiplicativo comune per tutte e tre le equazioni. Dopodiché ha aggiunto tre ulteriori parametri, uno per ogni variabile, e li ha definiti con tre lettere greche, γ , β , λ per diversificare le dinamiche sui tre assi; infine ha aggiunto la funzione di switch non lineare $g(x)$ soltanto nella terza equazione ottenendo così il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = r(-\gamma x - \beta y - \lambda z) \\ \dot{y} = r[x + y(\gamma - 0{,}02)] \\ \dot{z} = r[g(x) - z] \end{cases} \qquad [10]$$

dove $r = 10^4 s^{-1}$, $\gamma = 0{,}05$, $\beta = 0{,}5$ e $\lambda = 0{,}133$; ora, la funzione di switch non lineare è definita da:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow se: x \leqslant 3 \\ \mu(x-3) & \Rightarrow se: x > 3 \end{cases} \qquad [11]$$

in cui $\mu = 15$. Con questi valori ha potuto disegnare lo schema elettrico dell'oscillatore caotico riportato in fig.1.1.9. In verità lo schema originale era privo di U3A, U3B e U4B e di tutti i resistori ad essi relativi, ovvero R15, R16, R17, R18, R19, R20 e R21. Tali componenti sono stati aggiunti dall'autore del presente documento in fase di simulazione per avere la possibilità di comparare la dinamica osservata in 3D del "vero" circuito di Rössler, riportata in fig.1.1.4, con quella del circuito di Carroll che evidentemente non è proprio la stessa cosa, anche se le traiettorie ottenute in qualche modo si assomigliano e pertanto questi due circuiti non dovrebbero mai essere confusi fra loro.

Se fossero stati comparati sul piano in 2D utilizzando solo le variabili x, y le differenze sarebbero state ancora meno evidenti. Queste differenze sono dovute alle diverse dinamiche non lineari che può produrre un moltiplicatore da quelle che produce un diodo che nel circuito di Carroll è identificato come D1 e che determina la funzione non lineare sull'asse z ma anche sull'asse x .

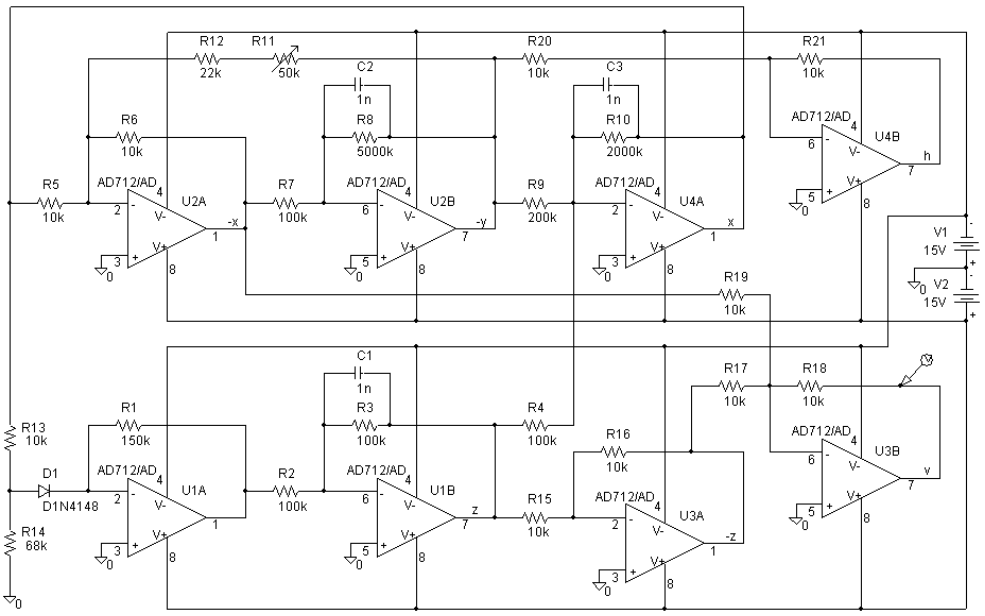

Fig.1.1.9 Sistema oscillante caotico di Thomas L. Carroll (2004)

Analogamente a quanto era già stato fatto in precedenza le funzioni caotiche nel dominio del tempo delle tre variabili principali sono state separate e riportate in fig.1.1.10.

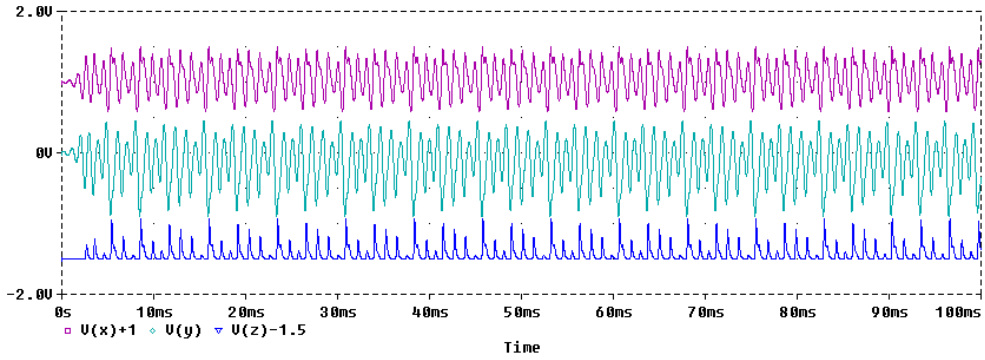

Fig.1.1.10 Andamenti temporali delle variabili x, y e z nel circuito di Carroll

Anche in questo caso, paragonando gli andamenti temporali di tale figura con quelle prodotte dal circuito caotico che simula fedelmente il sistema

di Rössler riportato in fig.1.1.6 è veramente difficile distinguerle, tuttavia il lettore potrà notare che mentre sull'asse z del circuito che simula il sistema originale produce dei picchi positivi estremamente stretti e di ampiezza elevata, nel circuito proposto da Carroll, invece, gli stessi picchi hanno un'ampiezza ridotta e soprattutto non sono altrettanto stretti. Questo accade perché il punto di equilibrio virtuale nel sistema di Carroll non produce gli stessi effetti sull'assorbimento dell'energia prodotta dall'oscillatore sinusoidale a causa della curvatura non lineare del diodo che non permette di assorbire sufficiente energia in tempi rapidi come invece prevede il sistema di Rössler e, di conseguenza, anche nel circuito che ne simula il comportamento attraverso un moltiplicatore.

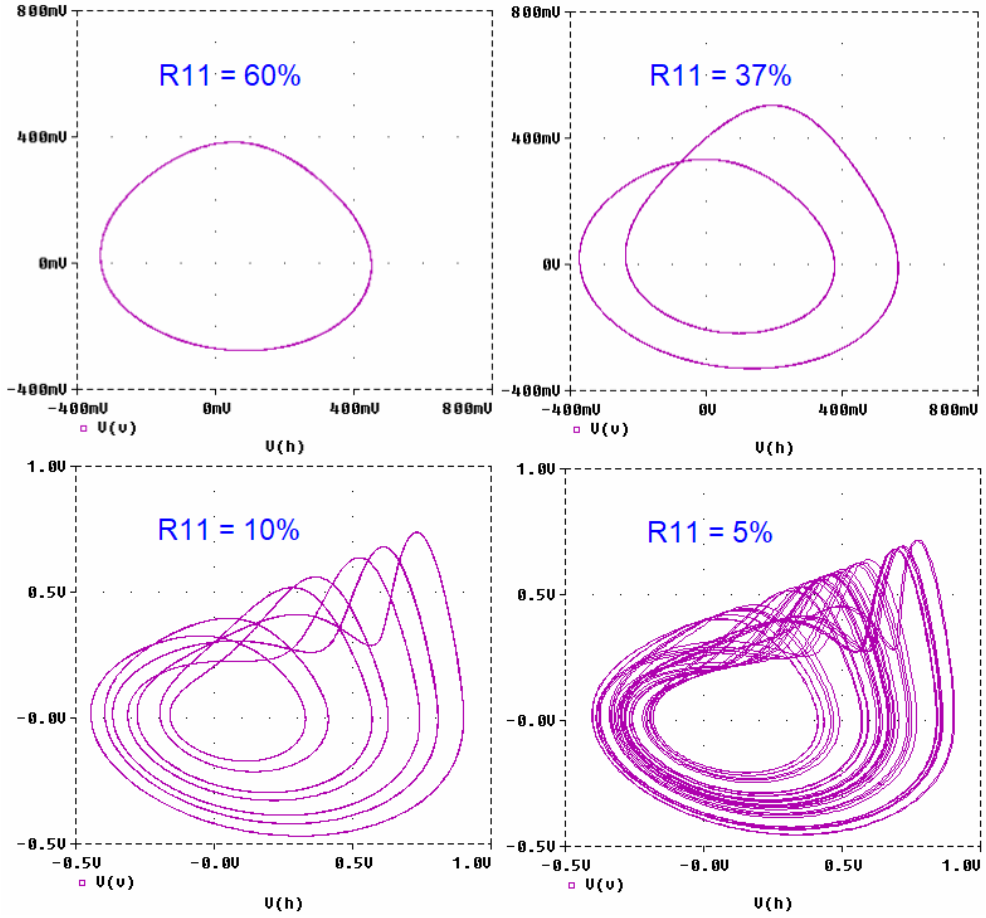

Fig.1.1.11 Traiettorie ottenibili con il sistema oscillante di fig.1.1.9

Inoltre, nella rappresentazione virtuale delle traiettorie in 3D di fig.1.1.11 è possibile notare anche una marcata ondulazione in corrispondenza dell'attivazione dello switch che invece non è presente nella rappresentazione di fig.1.1.6 (le traiettorie ruotano in senso antiorario). Tuttavia bisogna ammettere che nel circuito sviluppato da Carroll è più facile osservare delle singolarità dovute principalmente alla diversa struttura delle biforcazioni fra i due sistemi. Con questo non si vuole e non si può affatto sminuire il grande lavoro eseguito da Elwalkil-Kennedy e neppure quello di Carroll, ma è importante ribadire il concetto che il circuito che simula fedelmente il sistema di Rössler non è e non deve mai essere confuso con quello alternativo disegnato da Carroll che si basa su un concetto molto interessante, quello di Elwalkil-Kennedy, e che però in pratica non è in grado di riprodurre risultati analoghi, soprattutto se si usa un semplice diodo per ottenere la necessaria funzione di switch indicata nel profilo analitico.

Nello schema di fig.1.1.9 è il trimmer R11 a controllare il parametro γ che determina l'ampiezza di x e di y : se lo switch è sempre “off” si ottiene un singolo ciclo limite come quello raffigurato in alto a sinistra di fig.1.1.11, che rappresenta un'oscillazione quasi sinusoidale. Riducendo il valore di R11 si ottiene una prima biforcazione per R11=37% e in sequenza un intercalare di fenomeni caotici con altri, definiti “singolarità”, che nel caso del circuito di Carroll si riescono ad apprezzare fino a un ciclo limite composto da ben 7 traiettorie diverse che si ripetono nel tempo. Per ottenere un sicuro comportamento caotico è necessario scendere con R11 al di sotto del 5%. Questo circuito è molto adatto per iniziare un valido approccio verso i sistemi caotici in ambienti universitari perché consente agli studenti di apprezzare più facilmente un elevato numero di singolarità che di norma non si otterrebbero con altri circuiti che simulano i più noti sistemi oscillanti caotici (vedi quelli di Chua e quelli di Lorenz).

2. Evoluzione del sistema dinamico di Rössler

Se volessimo capire com'è nato l'interesse sui fenomeni caotici bisogna ripartire da Newton e dalla sua legge di gravitazione universale che è sem-

pre stata valida; essa dice: due corpi dotati di massa si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa. In pratica si ha che:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad [1]$$

in cui G = 6,67259(85) x 10^{-11} N x m^2/kg^2, il numero fra parentesi è l'incertezza assoluta; m_1 e m_2 sono invece le due masse e r è la distanza fra i centri dei due corpi. Con questa formula ad esempio è possibile calcolare istante per istante l'orbita della luna che ruota attorno alla terra. Ma cosa accade se i corpi invece di due diventassero tre? Questa era la domanda che si era posto un certo Giuseppe Luigi Lagrangia, naturalizzato in seguito Joseph-Louis Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813), che è stato un matematico e astronomo italiano naturalizzato francese e attivo, nella sua maturità scientifica, per 21 anni a Berlino e in seguito per altri 26 anni a Parigi.

Il problema dei tre corpi è uno dei problemi più noti della dinamica di base relativi alla meccanica classica. In generale esso consiste nel calcolare, data una posizione iniziale, la massa e la velocità di tre corpi soggetti all'influsso della reciproca attrazione gravitazionale nonché l'evoluzione futura del sistema da essi costituito. Si potrebbe pensare in linea di principio che il calcolo possa essere effettuato risolvendo le equazioni differenziali ordinarie derivanti dalle leggi del moto di Newton, come avviene normalmente in presenza di due corpi; si dimostra tuttavia che la soluzione generale delle equazioni dinamiche di un sistema gravitazionale a tre corpi, che pure esiste ed è analitica, non è scrivibile in alcun modo in una forma esplicita che risulti più semplice delle equazioni originali di partenza. Soluzioni esplicite si possono trovare soltanto per casi particolari, mentre soluzioni di tipo approssimato, invece, sono ottenibili introducendo varie semplificazioni. Queste ultime si possono catalogare in due grandi gruppi:

- soluzioni di tipo numerico (un calcolatore determina per via approssimata l'evoluzione del sistema);
- soluzioni basate su perturbazioni.

In entrambi i casi, il risultato trovato è valido solo per un determinato lasso di tempo, oltre il quale il comportamento del sistema, che è di tipo caotico, diverge in modo imprevedibile.

Quando uno scienziato non è in grado di spiegare un fenomeno che non si può osservare direttamente ne analizza le conseguenze e le condizioni a contorno e poi trova il modo di realizzare un modello analitico con cui dimostrare la sua esistenza. É ciò che fece Henri Poincaré (Nancy, 1854 – Parigi, 1912) un matematico, fisico e filosofo francese che nel 1903 scrisse:

"*Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non è così, può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito*".

Il lavoro di Poincaré sul problema dei tre corpi è fondato sulla distinzione fra il caos deterministico e quello non deterministico che ancora oggi è alla base della teoria dei sistemi complessi. Naturalmente Poincaré non ha risolto il problema dei tre corpi, che ad oggi rimane irrisolvibile, ma ha trovato alcuni modi per poterlo superare attraverso le soluzioni sopra indicate; ed è proprio grazie a lui che oggi siamo in grado di inviare sonde su altri pianeti sfruttando la forza di gravità dei pianeti stessi.

Un altro nome illustre che visse nello stesso periodo di Poincaré e che diede un notevole contributo nella teoria dei sistemi dinamici fu Aleksandr

Michajlovič Ljapunov (Jaroslavl' 1857 – Odessa 1918) attraverso il suo famoso “esponente” o forse è più corretto dire “gli esponenti”. Un esponente di Ljapunov di un sistema dinamico deterministico in un punto nello spazio delle fasi fornisce una misura di quanto sensibilmente le orbite del sistema siano dipendenti dai dati iniziali, caratterizzando l'eventuale presenza di dinamiche caotiche. Gli esponenti di Ljapunov misurano in particolare la velocità media di allontanamento di due orbite infinitesimamente vicine per tempi sufficientemente lunghi; in un punto qualsiasi nello spazio delle fasi sono associati un numero di esponenti di Ljapunov pari alle dimensioni dello spazio stesso. Insomma l'esponente di Ljapunov altro non è che un perfetto indicatore di caoticità, esso generalizza tutto ciò che riguarda le orbite periodiche ad un orbita qualunque. Traduciamo dunque l’instabilità di un qualunque punto fisso con la crescita esponenziale della norma del generico vettore che si evolve con la dinamica tangente: l’esponente di Ljapunov misura tale tasso di crescita. Se abbiamo una mappa ϕ, l’evoluzione della mappa (e della dinamica tangente associata) è data dal sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x_n) v_n \end{cases} \qquad [2]$$

dove v_n è il vettore tangente. A questo punto l'esponente di Ljapunov è dato dal seguente limite:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|v_n\| \qquad [3]$$

Se λ è positivo allora il sistema presenta una dipendenza sensibile dai dati iniziali (in modo esponenziale), ed è quindi un sistema caotico.

Nel 1979 Rössler ha proposto un sistema di equazioni aventi due esponenti di Lyapunov positivi (LCEs) e che pertanto avevano un comportamento caotico; esso conteneva soltanto una singola non linearità e a quei tempi si presumeva che una gerarchia di attrattori caotici di ordine superiore potesse esistere in equazioni deterministiche altrettanto semplici (rispetto alla singola non linearità) ma solo se la dimensione del sistema fosse aumentata

gradualmente. Tuttavia, il sistema proposto da Rössler non mostrava percorsi generici dal ciclo limite all'ipercaos e quindi non era possibile estenderla a dimensioni superiori. D'altra parte, l'ipercaos, e la gerarchia caotica, possono essere più facilmente modellati con mappe discrete, cioè modelli espliciti di sezioni trasversali di attrattori; ma ciò è possibile nel caso in cui una variabile non lineare in una mappa unimodale con comportamento caotico viene ritardata linearmente. Questo è un metodo per generare il massimo ipercaos nei diffeomorfismi con un singolo termine non lineare. Di seguito verrà esplicitato per sommi capi il meccanismo con cui si applica tale metodo riconducendolo poi ad un esempio pratico con un circuito realizzato all'occorrenza.

2.1 Il sistema oscillante di Rössler generalizzato (o GRS)

Nel 1995, circa vent'anni dopo la presentazione del sistema dinamico caotico di Rössler, il Prof. Gerold Baier, insieme a Sven Sahle dell'Università di Tubinga in Germania, trovarono un modo analitico ben congegnato per generalizzare il sistema di Rössler; il loro obiettivo era quello di rendere tale sistema sempre caotico o ipercaotico, in qualsiasi condizione.

Si consideri il sistema a *N*-dimensioni di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 + a x_1 & \text{[1a]} \\ \dot{x_i} = x_{i-1} - x_{i+1} & \text{[1b]} \\ \dot{x_N} = \epsilon + b x_N (x_{N-1} - d) & \text{[1c]} \end{cases}$$

in cui $x, a, b, d, \epsilon \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $i = 2,..., N-1$ e $N \in \mathbb{N}$

il sottosistema lineare $(x_{1,}..., x_{N-1})$ è una catena di oscillazioni armoniche per $a = 0$; quando *N* è dispari la condizione del punto fisso porta a $x_1 = x_i = 0$; viceversa, quando *N* è pari si ha che $x_1 = x_3 = ... = x_{N-1}$ e $x_2 = x_4 = ... = x_{N-2} = 0$. Se $a > 0$ per *N* dispari il termine antidissipativo $a x_1$ porta a un flusso a spirale in espansione in $(N-1)$ direzioni con $(N-1)/2$ coppie di autovalori complessi; per *N* pari e per $a > 0$, invece, determina un flusso a spirale in espansione in $(N-2)$ direzioni con

$(N-2)/2$ coppie di autovalori complessi con parte reale positiva più una direzione di espansione con autovalore reale (positivo). La variabile $\dot{x}_N$ contiene una costante ϵ, una espressione non lineare del secondo ordine a dissipazione lineare. In accordo col sistema proposto da Rössler anche in questo caso la variabile derivata $\dot{x}_N$, definita in [1c], agisce da "soglia": essa si restringe o si espande in base al valore di x_{N-1}. Ecco quindi che, per completare il sistema, la variabile [1c] è stata accoppiata linearmente all'equazione per x_{N-1}; inoltre, è pure evidente che il sistema [1] contiene soltanto un termine non lineare. Per $N=3$ il sistema [1] si riconduce al sistema dinamico caotico di Rössler; invece per $N=4$ il sistema [1] definisce un nuovo flusso ipercaotico prototipale anch'esso con due esponenti LCEs positivi. Il sottosistema lineare a tre variabili (x_1, x_2, x_3) per $a=0$ dispone dei seguenti autovalori:

$$\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm i\sqrt{2} \qquad [2]$$

invece se $a>0$ il sottosistema ha un autovalore reale positivo e due autovalori complessi con la parte reale positiva; l'evoluzione si espande così a forma di spirale lungo l'asse $x_1=x_3$. La continua crescita della variabile x_3 inizierà quindi ad attivare lo switch non lineare x_4. Per alcuni gruppi di parametri x_N mantiene comunque un flusso confinato ma conduce a soluzioni interessanti; ad esempio nel sistema con $N=3$, la non linearità può anche creare evoluzioni caotiche. Tuttavia, in un sistema quadridimensionale sono possibili due direzioni di allungamento e di piegatura: ad esempio col set di parametri $b=4, d=2, \epsilon=0{,}1$ quando il parametro a incrementa iniziando da $a=0$ si osserva una sequenza di biforcazioni a partire da un punto fisso (niente oscillazioni) fino all'ipercaos.

In primo luogo, si viene a creare un ciclo limite in una biforcazione di Hopf e, in seguito, tale ciclo limite perde stabilità in una biforcazione di Hopf secondaria per dare origine a una doppia spirale attrattiva. Il moto quasi-periodico è seguito poi da una diversa modalità "agganciata su se stessa" della doppia spirale; tale modalità perde quindi di stabilità in una ulteriore biforcazione di Hopf secondaria e le increspature di questa doppia spirale conduce poi al caos verso una singola spirale frattale (una sequenza simile a quella già osservata nelle fig.1.1.6 e fig.1.1.11).

Nelle condizioni in cui si presenta un comportamento caotico inizialmente troveremo una piccola finestra di caos, con un LCE positivo, seguita da una finestra più ampia in cui si determina l'ipercaos. Per $a=0{,}4$ si calcola la seguente mappatura di LCEs: $\lambda_{1,\dots,4}=[0{,}146\ ;\ 0{,}071\ ;\ 0\ ;\ -1{,}80]$; ossia due esponenti positivi; in tali condizioni la sezione trasversale è simile a quella di un foglio che presenta numerose pieghe. Per $N=5$ il sistema [1] determina attrattori con tre esponenti LCEs positivi; in questo caso per $a=0$ il sottosistema lineare $(x_1,\dots,x_4)$ avrà i seguenti autovalori:

$$\lambda_{1,2,3,4}=\pm i\left(3/2\pm\sqrt{5/4}\right)^{1/2} \qquad [3]$$

Se $a>0$ il sottosistema avrà due coppie di autovalori complessi con la parte reale positiva; l'evoluzione però stavolta avrà la forma di due spirali in espansione. La variabile non lineare condurrà ancora ad uno schema evolutivo confinato in un sistema complesso creando LCEs positivi e un processo di allungamento e di ripiegatura della sua sezione trasversale.

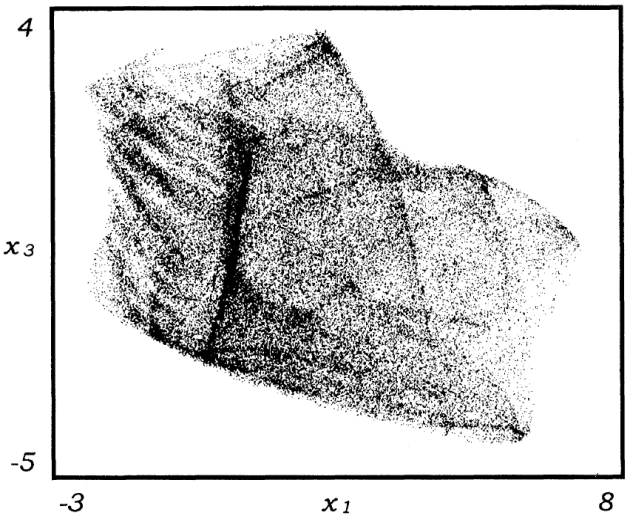

Fig.2.1.1 Sezione trasversale del 2° ordine del sistema caotico [1] per N=5, a=0,33, b=4, d=2 e ϵ=0,1; la 1ª sezione è stata presa per x_5=1, mentre la 2ª sezione è stata plottata per x_2=0±0,07

Partendo da un punto fisso stabile per $a=0$, due successive biforcazioni di Hopf conducono inizialmente a un ciclo limite e poi a una doppia spirale attrattiva; incrementando ulteriormente la variabile a , si manifesteranno altri cicli limite, caos e ipercaos; vi saranno anche situazioni critiche con numerose regioni di multi-stabilità, oltre ad una complicata struttura di confinamento del bacino attrattivo su cui si evolve l'intero inviluppo. Con $b=4, d=2, \epsilon=0{,}1$ e per

$N=5$ e $a=0{,}33$ è stato calcolato il massimo ipercaos con i seguenti valori di LCEs: $\lambda_{1,\dots,5}=[0{,}141\ ;\ 0{,}108\ ;\ 0{,}048\ ;\ 0\ ;\ -9{,}95]$, e pertanto si avranno n.3 LCEs positivi, vedi la sezione trasversale di Poincaré in fig.2.1.1. Tale sezione trasversale ha una dimensione di Ljapunov $3<D_\lambda<4$ e appare come una nuvola sfuocata di punti; si tratta di una sezione trasversale di secondo ordine che mostra una struttura a forma di foglio ripiegato prevista dallo studio dei diffeomorfismi in 4D.

Ora, calcolando la conformazione spettrale degli LCEs per $N=7$ e con $a=0{,}32$, ma mantenendo costanti $b=4, d=2, \epsilon=0{,}1$ si è ottenuto che : $\lambda_{1,\dots,7}[0{,}102\ ;\ 0{,}079\ ;\ 0{,}067\ ;\ 0{,}035\ ;\ 0\ ;\ -0{,}024;\ -9{,}95]$, ovvero n.4 LCEs positivi, uno in meno rispetto al massimo possibile. Analogamente, per $N=9$ e con $a=0{,}30$, e con $b=4, d=2, \epsilon=0{,}1$ si ottengono n.6 valori positivi di LCEs, e cioè:

$$\lambda_{1,\dots,9}=[0{,}078\ ;\ 0{,}066\ ;\ 0{,}057\ ;\ 0{,}043;\ 0{,}027;\ 0{,}010\ ;\ 0\ ;\ -0{,}024\ ;\ -9{,}63]$$

Pertanto si osserva che il numero di LCEs positivi incrementa all'aumentare di *N*, con tutte le conseguenze che ciò comporta dal punto di vista caotico; se tutti i parametri vengono mantenuti costanti, il valore numerico del primo esponente diminuisce all'aumentare di *N* mentre la somma degli LCEs positivi (come stima dell'entropia metrica) rimane quasi costante. E non si tratta proprio di “osservazioni di poco conto”.

Infine, se nel sistema [1] sostituissimo l'equazione per $\dot{x}_N$ con:

$$\dot{x}_N=b(|x_{N-1}-d|+x_{N-1}-d)-x_N \qquad [4]$$

si otterrà un sistema lineare “a tratti”; per $N=5$, $a=0{,}30$ e sempre per $b=4, d=2, \epsilon=0{,}1$ è possibile calcolare il seguente pacchetto di LCEs:

$$\lambda_{1,\dots,5}=[0{,}123\ ;\ 0{,}096\ ;\ 0{,}062\ ;\ 0\ ;\ -1{,}16]$$

Ancora una volta l'esistenza di n.3 esponenti positivi dimostra il massimo ipercaos.

Il settore scientifico maggiormente interessato a questo tipo di approccio analitico è la cinematica chimica, in particolare le reazioni isotermiche possono essere modellate con successo da un insieme finito di equazioni differenziali deterministiche; ad esempio nel sottosistema $(x_{1,}\ldots,x_{N-1})$ è presente un insieme di reazioni che preserva lo spazio delle fasi e il volume per $a=0$. Tale sottosistema è uno schema di Lotka-Volterra generalizzato per una sequenza di reazioni auto-catalitiche con dinamica periodica o quasi-periodica conservativa. Ma questi dettagli sulle reazioni isotermiche non sono l'obiettivo della presente trattazione; piuttosto ci interessa avere un'idea su come sia possibile trasformare la struttura originale di un GRS, introdotta da Baier e Sahle, in una rappresentazione modale; essa permette una migliore comprensione del meccanismo che genera la dinamica di questo sistema complesso.

Ripercorrendo il cammino iniziale Baier e Sahle essi hanno semplicemente introdotto una equazione addizionale nel sistema caotico originale di Rössler del tipo $\dot{x}_i=x_{i-1}-x_{i+1}$ fra la prima equazione auto-catalitica e l'ultima equazione non lineare (vedi la [1]); in una rappresentazione a matrice si avrà:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+e_{N-1}x_N\\ \dot{x_N}=\epsilon+bx_N(x_{N-1}-d)\end{cases} \qquad [5]$$

dove $x=(x_{1,}x_{2,}\cdots,x_{N-1})^T$, $e_{N-1}=(0,\cdots,0,1)^T$, e:

$$A=\begin{bmatrix}a & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0\\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad [6]$$

Per $N=3$ si ritorna all'equazione originale di Rössler; le equazioni hanno la struttura di una catena lineare in x con un termine auto-cataliti-

co a un'estremità e accoppiato in modo non lineare a una variabile di trigger x_N all'altra estremità, vedi fig.2.1.2(a).

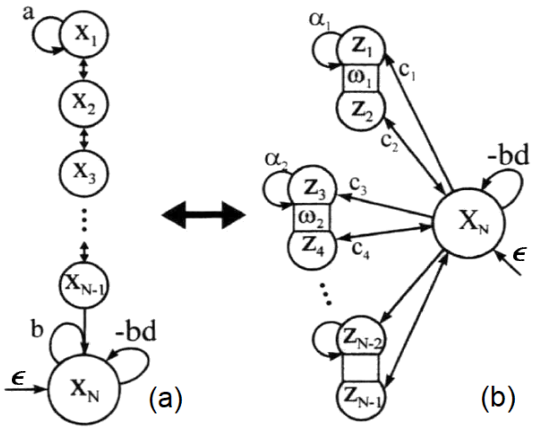

Fig.2.1.2 Struttura di un sistema GRS: in forma originale (a) e in forma modale (b)

Lo schema con cui si evolvono gli stati è sempre lo stesso: fino a quando $x_N - 1$ è più piccolo della soglia d il valore di x_N resta contenuto intorno a $\epsilon + b x_N (d - x_{N-1})$; soltanto quando il sistema ha guadagnato una energia sufficiente, ovvero quando $x_N > d$, x_N inizia a crescere rapidamente e ripiega l'inviluppo verso il centro dissipando così energia. Avremo quindi lo stesso meccanismo di allungamento e ripiegatura del sistema originale di Rössler. Si osservano quindi lunghi intervalli di oscillazione e di crescita regolari del sottosistema lineare, interrotti da brevi picchi della variabile di trigger x_N che impediscono al sistema di espandersi all'infinito.

Si consideri ora il caso in cui *N* sia un numero dispari, dove la catena lineare ha un numero pari di gradi di libertà e, quindi, $(N-1)/2$ coppie di autovalori complessi coniugati; in questo contesto Th. Meyer, Martin Bünner, Achim Kittel e Jürgen Parisi del Physical Institute of University of Bayreuth, (quindi non lo stesso Parisi che conosciamo noi grazie al suo recente premio Nobel) hanno presentato nel 1995 una reale trasformazione in $z = U^{-1} x$ del sottosistema lineare x in una forma modale ovvero oscillatori di frequenza ω_i , auto-catalitici, e con coefficienti di crescita α_i , che interagiscono solo tramite la variabile di trigger x_N . Le equazioni così trasformate sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{z} = Bz + x_N c & \text{[7a]} \\ \dot{x}_N = \epsilon - b x_N (z_2 + z_4 + \cdots z_{N-1} - d) & \text{[7b]} \end{cases}$$

dove:

$$B = U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\omega_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_2 & -\omega_2^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots \end{bmatrix} \qquad [8]$$

e $c = U^{-1} e_{N-1}$ sono i coefficienti di accoppiamento di x_N a z . Le frequenze ω_i , i coefficienti di crescita α_i del processo auto-catalitico e i coefficienti di accoppiamento c_i che regolano l'influenza di x_N sugli oscillatori sono determinati in modo univoco (questo quando si assume tale forma speciale dell'equazione non lineare) e tutti dipendono da a . La struttura nella sua forma modale, vedi la struttura in fig.2.1.2(b), tutti gli oscillatori sono accoppiati alla variabile di trigger x_N allo stesso modo; questa simmetria è interrotta dalle differenze nei coefficienti ω_i , α_i e c_i appartenenti a ciascun oscillatore, nel caso in cui $N = 5$ gli oscillatori sarebbero soltanto due (z_1, z_2) e (z_3, z_4) .

Si è scelto di studiare l'esempio per $N = 5$ proprio perché esso è in grado di mettere in evidenza tutte le condizioni più comuni riscontrabili in un GRS, condizioni che vanno dal semplice ciclo limite al caos e quindi all'ipercaos semplicemente variando il parametro a fra 0 fino a 0,33; le altre condizioni a contorno saranno quelle solite: $b = 4, d = 2, \epsilon = 0{,}1$. Entrambi gli oscillatori, (z_1, z_2) e (z_3, z_4) , sono accoppiati alla variabile x_N ma il primo oscillatore avrà una frequenza inferiore e una maggior crescita dei coefficienti al variare di a rispetto al secondo, vedi la dipendenza di tali parametri in fig.2.1.3. Ci si aspetta che l'oscillatore (z_1, z_2) sia dominante rispetto a quell'altro perché la sua dinamica cresce molto più velocemente e, quindi, è in grado di innescare i picchi di x_N , ovvero il processo di dissipazione, prima che (z_3, z_4) abbia la possibilità di svilupparsi; infatti ciò accade per piccoli valori di a in cui (z_1, z_2) si può definire “master” mentre (z_3, z_4) sarebbe lo “slave”, e in effetti lo è ma solo fino a quando il valore crescente di a raggiunge una determinata soglia limite; oltre tale

limite l'oscillatore (z_3, z_4) prende il controllo diventando lui il “master”, vedi il diagramma delle biforcazioni in fig.2.1.4.

L'esistenza di due attrattori diventa evidente se si considera una versione perfettamente simmetrica del sistema, ovvero $\omega_1=\omega_2, \alpha_1=\alpha_2$ e $c_1=c_3, c_2=c_4$; in tal caso ogni soluzione ha una sua complementare che è ottenuta dalla trasformazione $z_1\to z_3, z_2\to z_4, z_3\to z_1, z_4\to z_2$. Di conseguenza per ogni attrattore deve esistere un secondo attrattore complementare che si ottiene dalla medesima trasformazione. Ma anche in un sistema asimmetrico, come nel nostro caso, sembrerebbero esistere due distinti attrattori; c'è sempre, quindi, un oscillatore dominante, di maggior ampiezza, che attiva la variabile x_N la cui fase è solo marginalmente influenzata dai suoi stessi picchi.

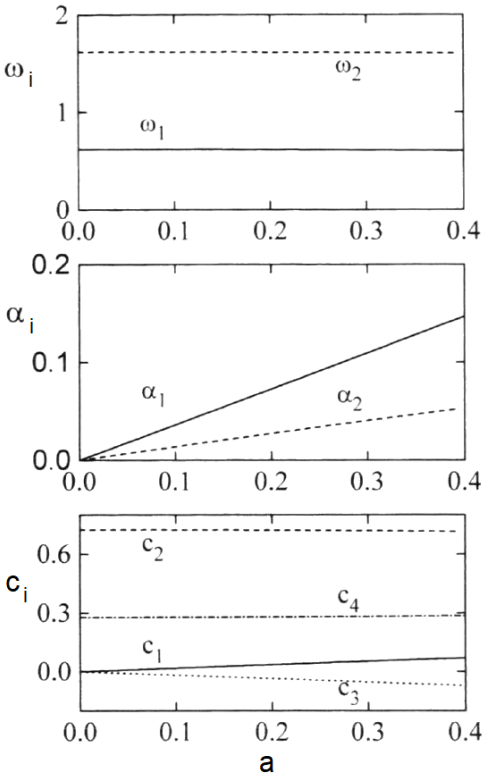

Fig.2.1.3 Le due frequenze ω_1 e ω_2 e la crescita dei coefficienti α_i e c_i all'aumentare di a

Di seguito verrà analizzato nel dettaglio il comportamento di entrambi gli oscillatori al variare del parametro a ossia (z_1, z_2) , quello che sviluppa l'attrattore 1, e (z_3, z_4) , quello che sviluppa l'attrattore 2. Ricordo che nel nostro caso i due attrattori non sono complementari fra loro perché il sistema è asimmetrico.

Per $a\in[0,0{,}006]$ è presente soltanto un punto fisso stabile; quando $a=0{,}006$ il sistema inizia a diventare instabile ed emerge un ciclo limite (una oscillazione non caotica), vedi lo spettro degli esponenti di Ljapunov in fig.2.1.4. Incrementando ancora a tale situazione si evolve solo con una naturale crescita della distorsione introdotta dalla variabile di trigger x_N , tuttavia è evidente che l'oscillatore (z_1, z_2) è dominante rispetto all'oscil-

latore (z_3, z_4) , vedi fig.2.1.5(a), si notino le fasi fra i due oscillatori nonostante la diversa conformazione dei due cicli limite che anticipa una situazione di aggancio 1:2 quando a è appena inferiore a 0,04.

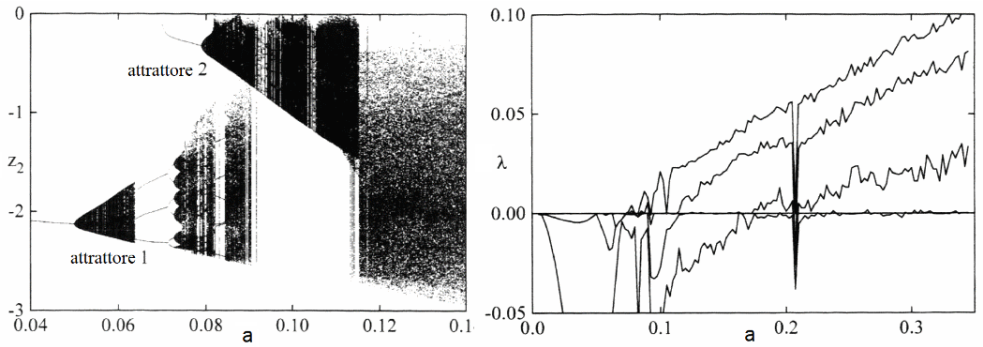

Fig.2.1.4 Diagramma delle biforcazioni a sinistra e spettro degli esponenti di Ljapunov a destra in funzione di a

Quando si raggiunge e si supera il limite in cui $a=0{,}04$ l'oscillatore (z_3, z_4) inizia a prendere il sopravvento diventando lui il "master", si noti il netto cambio di fase in fig.2.1.5(b).

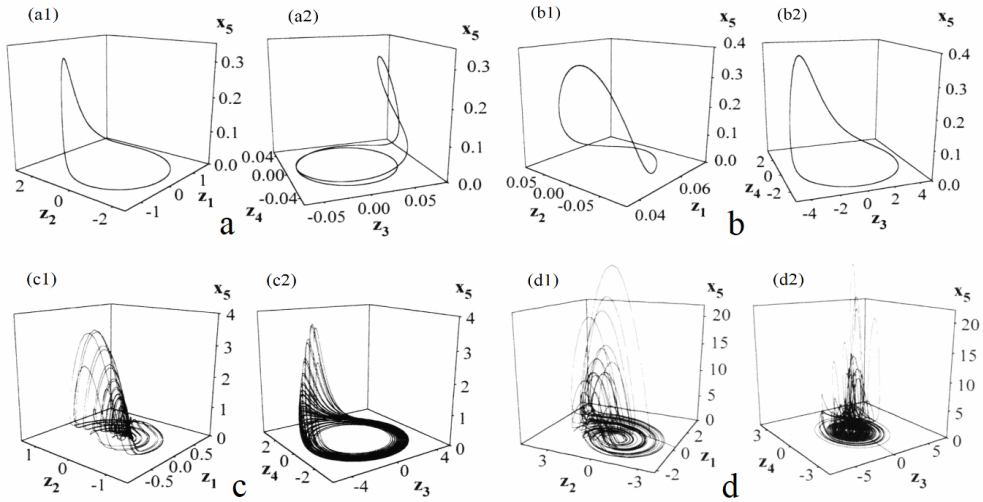

Fig.2.1.5 Proiezioni delle orbite dei due oscillatori al variare di a

Si definisce “slave” l'oscillatore il cui moto non influenza o influenza solo marginalmente l'oscillatore “master” ma che in qualche modo tende ad agganciarsi ad esso. Per $a=0,051$ il sistema non riesce più a sostenere l'aggancio fra master e slave e si verifica uno stato “quasi periodico”. Man mano che a aumenta, otteniamo prima una finestra con un aggancio in modalità 3:8 che poi si biforca in un aggancio il modalità 6:16 attraverso il raddoppio del periodo, ovvero il cosiddetto “Period Doubling Bifurcation”. Si entra infine nel regime caotico attraverso una complessa struttura intrecciata di intervalli altamente periodici, quasi periodici, e anche caotici.

Il Prof. Dr. Jürgen Parisi

Nell'intervallo $a\in[0,09\,,0,115]$ è presente soltanto l'attrattore 2, mentre per $a>0,115$ esistono solo uno dei due attrattori, alternativamente; tale fenomeno può essere riconducibile a due distinte situazioni di crisi. Infatti è interessante notare che il secondo esponente di Ljapunov, quello più grande, diventa positivo proprio per $a=0,115$, mentre per a $a>0,115$ abbiamo già due esponenti di Ljapunov positivi. In quella regione i tre esponenti maggiori sembrano crescere quasi linearmente con a, il che porta al terzo esponente positivo per circa $a=0,17$. Dopodiché non si osservano sostanziali differenze nel comportamento del sistema dal momento in cui il terzo esponente diventa positivo, né nel diagramma di biforcazione e neppure nelle traiettorie; piuttosto lo schema sembra acquisire sempre più complessità all'aumentare di a, ma soprattutto, il rapporto “master/slave” tende a stabilizzarsi. In fig.2.1.5(c) abbiamo un evidente comportamento caotico per $a=0,10$ mentre si percepisce un comportamento ipercaotico in fig.2.1.5(d) con $a=0,30$, quindi con n.3 esponenti di Ljapunov certamente positivi; si noti come la dinamica ipercaotica del “master” $(z_3\,,z_4)$ sia sempre più complessa e articolata rispetto a quella ipercaotica dello “slave” $(z_1\,,z_2)$.

2.1.1 Due semplici oscillatori caotici simil-Rössler

In seguito alla modifica di Elwalkil-Kennedy sul sistema originale di Rössler, cioè di sostituire il moltiplicatore con uno switch non lineare per ottenere il cosiddetto “fold-back”, ovvero la ripiegatura all'indietro della spirale in espansione, si è aperta una nuova strada che molti ricercatori hanno tentato di percorrere per tradurre in pratica questo concetto; pertanto il circuito oscillante simil-Rössler di Thomas Carroll, già analizzato nel paragrafo precedente, non fu l'unico ad essere sviluppato all'inizio degli anni 2000, per quanto esso sia quello più vicino all'architettura del circuito che rappresenta la traduzione diretta del sistema originale in ogni suo aspetto, ovvero mantenendo l'impianto della struttura originale. Infatti, una traiettoria a spirale in espansione altro non è che il comportamento dinamico di un oscillatore qualsiasi e pertanto tale effetto è riproducibile con molte altre architetture, spesso anche molto più semplici del circuito di Carroll che rispetta in maniera “ortodossa” il sistema modificato da Elwalkil-Kennedy.

Di seguito verranno analizzati altri due circuiti analoghi: il primo, per via della sua estrema semplicità, proposto da A. Tamaševičius, G. Mykolaitis, V. Pyragas e K. Pyragas, esso è un oscillatore caotico studiato appositamente per scopi educativi; si fa notare che questa implementazione non è mai stata sponsorizzata come un circuito che replica il sistema di Rössler perché in effetti non lo è, così come quello di Carroll; esso è un simil-Rössler o se volete un Rössler-like perché include la modifica di Elwalkil-Kennedy. Il secondo, invece, è una delle tante implementazioni proposte da Ned Corron (in questa occasione insieme a Shawn D. Pethel e Buckley A. Hopper, tutti della “U.S. Army Aviation and Missile Command”, Redstone Arsenal in Alabama), un circuito che replica un sistema simil-Rössler che si adatta molto bene a sviluppi futuri essendo costituto da una architettura che ricorda molto l'oscillatore caotico di Chua, anche se quest'ultimo sfrutta concetti dinamici molto diversi e basati su altri tipi di non linearità. Per eventuali consultazioni e/o approfondimenti su tali argomenti si suggerisce la lettura del libro “Sistemi Oscillanti Caotici”, ISBN 979-8346122463.

L'oscillatore proposto da Tamaševičius è composto da un singolo amplificatore operazionale tipo µA741, un modello storico, ultra-economico e di facile reperibilità; inoltre questo amplificatore può essere alimentato anche a ±20V e oltre a differenza di molti altri operazionali di ultima generazione che si limitano ad operare al massimo fino a ±15V. Lo schema elettrico di tale oscillatore caotico è riportato in fig.2.1.6.

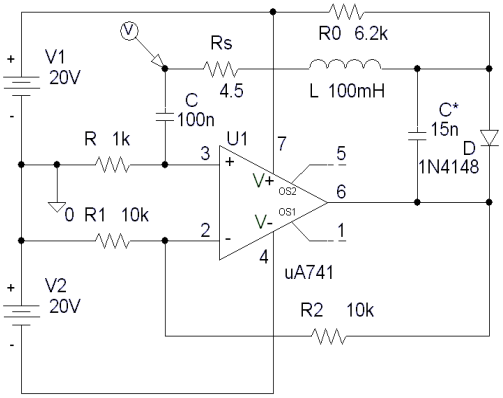

Fig.2.1.6 Circuito oscillante caotico proposto da A. Tamaševičius (et al.)

In assenza del diodo D il circuito sarebbe un semplice oscillatore sinusoidale con feedback positivo ottenuto mediante una rete LC risonante serie. Per ottenere una frequenza bassa, nei limiti del campo audio, la L deve essere piuttosto grande (elevato numero di spire di filo di rame) e pertanto avrà una sua resistenza parassita al passaggio della continua che nello schema è stata rappresentata come R_S; un componente acquistabile sul mercato con tali parametri è la B82731M(H)2351A030 della Epcos-TDK. La presenza di R0 e del diodo D (un tipico componente non lineare) può trasformare l'oscillatore sinusoidale in un perfetto oscillatore caotico con traiettorie equivalenti molto simili a quelle sviluppate da Rössler negli anni '70. Il punto di intervento del diodo può essere regolato sia dal valore di R0 che dal parametro "*k*" che rappresenta il guadagno dell'operazionale; esso può anche essere regolato in modo fine con R2 da 2 a 1 riducendone il valore gradualmente fino a raggiungere 0 ohm. Onde evitare di distruggere il diodo e/o l'operazionale è consigliabile evitare di ridurre a valori inferiori a 500 ohm.

© OPTELEX - Diritti riservati

Applicando la legge di Kirchhoff si ottiene il seguente set di equazioni differenziali che descrivono la dinamica dell'oscillatore:

$$C\frac{dV_C}{dt}=I_L \quad , \quad L\frac{dI}{dt}=(k-1)RI_L-V_C-V_C^* \quad , \quad C^*\frac{dV_C^*}{dt}=I_0+I_L-I_D \quad [1]$$

In questo caso $I_0\approx V_b/R_0$, ammesso che $R_0\gg R,\rho$, è la corrente di polarizzazione, mentre $I_D=f(V_C^*)$ è la caratteristica tensione/corrente non lineare del diodo; essa così definita:

$$I_D=I_S\left[\exp\left(e\frac{V_D}{k_BT}\right)-1\right] \qquad [2]$$

dove I_S e V_D sono rispettivamente la corrente e la tensione ai capi del diodo (da notare che $V_D=V_C^*$ perché si trovano in parallelo fra loro); poiché e rappresenta la costante matematica di Eulero/Nepero, per una rappresentazione più immediata ed efficace si è preferito usare la funzione $\exp$ per scrivere la [2]; infine, k_B è la costante di Boltzmann, mentre T è la temperatura assoluta.

Come al solito introducendo le seguenti variabili adimensionali

$$\begin{cases} x=\dfrac{V_C}{V_T} \;\; ; \;\; y=\rho\dfrac{I_L}{V_T} \;\; ; \;\; z=\dfrac{V_C^*}{V_T} \;\; ; \;\; \theta=\dfrac{t}{\tau} \\ V_T=\dfrac{k_BT}{e} \;\; ; \;\; \rho=\sqrt{\dfrac{L}{C}} \;\; ; \;\; \tau=\sqrt{LC} \;\; ; \;\; a=(k-1)\dfrac{R}{\rho} \\ b=\dfrac{\rho I_0}{V_T} \;\; ; \;\; c=\dfrac{\rho I_S}{V_T} \;\; ; \;\; \varepsilon=\dfrac{C^*}{C} \qquad k=1+\dfrac{R_2}{R_1} \end{cases} \qquad [3]$$

diventa possibile scrivere le tre equazioni di un sistema più conveniente per eseguire una simulazione numerica, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ay - x - z \\ \varepsilon \dot{z} = b + y - c(\exp z - 1) \end{cases} \qquad [4]$$

naturalmente il punto sopra la variabile identifica la sua derivata rispetto a θ . Per alcuni valori dei parametri di controllo a, b e ε (per $c \ll 1$ in questo modo l'oscillazione diventa insensibile a tale valore) l'oscillatore genera un inviluppo caotico, come mostrato in fig.2.1.7 e fig.2.1.8.

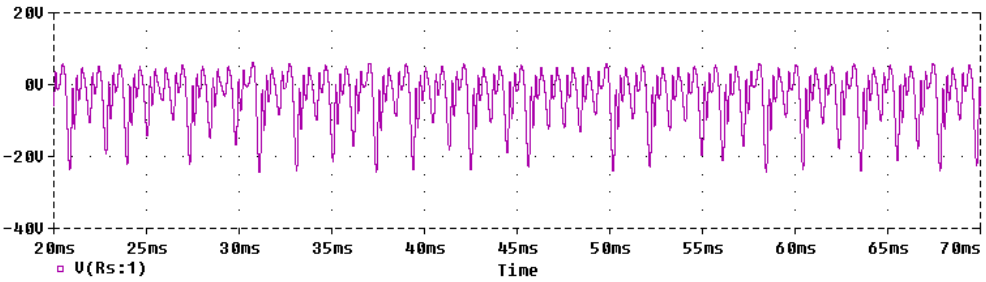

Fig.2.1.7 Andamenti temporali della variabile V_C nel circuito di Tamaševičius

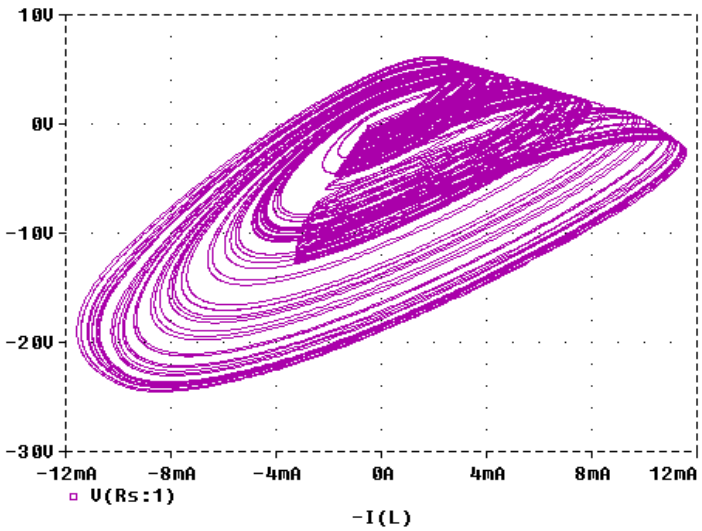

Fig.2.1.8 Traiettorie ottenibili con il sistema oscillante di fig.2.1.6

Si noti come le traiettorie di fig.2.1.8 siano molto simili a quelle di fig.1.1.8(A) e pertanto esse ricalcano in qualche modo il sistema di Rössler modificato proposto da Elwalkil-Kennedy. In fig.2.1.9 sono evidenziate le condizioni di instabilità del sistema al variare di a ; quando tale valore supera la soglia di circa 0,1 iniziano a nascere biforcazioni, inizialmente del tipo "period doubling" per poi diventare caotiche quando $a>0,2$, cioè quando l'esponente di Ljapunov inizia a diventare positivo.

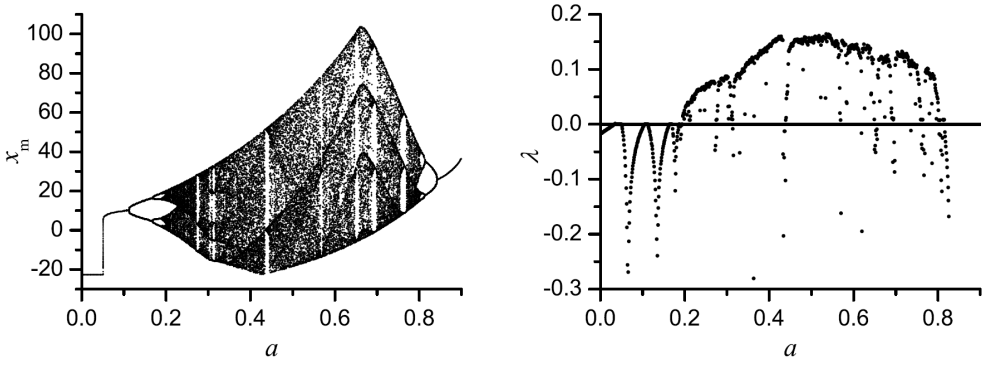

Fig.2.1.9 Diagramma delle biforcazioni a sinistra e spettro degli esponenti di Ljapunov a destra in funzione di a

Si noti che con valori di $a>0,67$ il dominio caotico si inverte presentando una numerosa sequenza inversa di biforcazioni fino a ritornare a un regime di stabilità quando $a>0,8$ circa.

Il "colpevole" del secondo oscillatore caotico che proponiamo con caratteristiche simili al sistema dinamico non lineare proposto da Rössler è il Dr. Ned Corron la cui foto è riportata qui accanto; ebbene questo personaggio è molto conosciuto a livello internazionale perché da sempre è colui che si cimenta a "tradurre" le formule matematiche di sofisticati sistemi instabili con dinamiche caotiche in circuiti elettronici utilizzando componentistica analogica tradizionale (quindi semplici operazionali,

Dr. Ned J. Corron

moltiplicatori diodi e reti RLC piuttosto che i DSP). Egli è un ricercatore che pubblicava articoli interessanti anche su “American Association of Physics Teachers” e che fa parte della “U.S. Army Aviation and Missile Command”; il suo ruolo è stato anche quello di studiare nuovi sistemi di crittografia per secretare le comunicazioni militari e/o le informazioni sensibili.

Il circuito che Corron (e altri) propone nel lontano 2002 è costituito da n.3 stadi: un circuito risonante LC, composto dalla capacità C2 e dall'induttanza simulata dalla rete elettrica a cui fanno capo U1A e U1B, da una resistenza negativa, a sua volta realizzata con l'operazionale U2A, e infine da un elemento non lineare che composto da una terza rete elettrica a cui fanno capo gli operazionali U3A, U3B e il diodo D1, vedi fig.2.1.10.

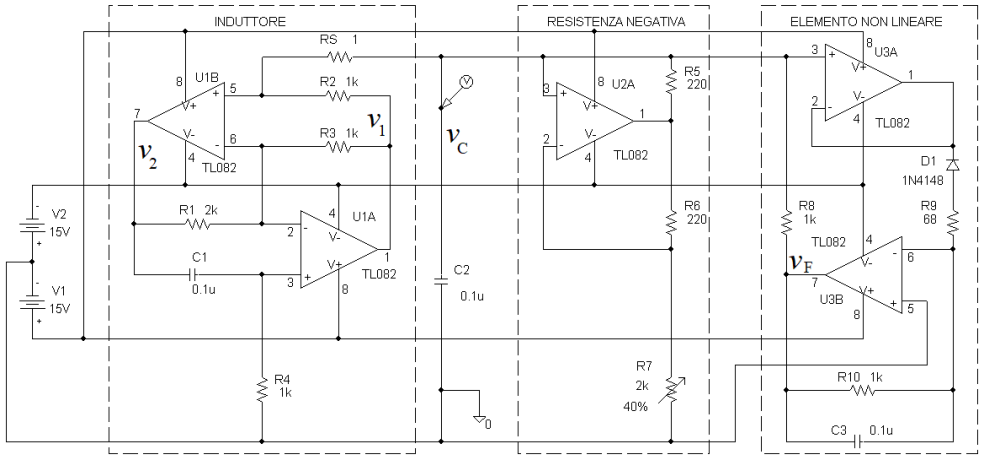

Fig.2.1.10 Circuito oscillante caotico proposto da Ned Corron (et al.)

Nel caso specifico il valore dell'induttanza è piuttosto grande, si parla di 0,2H, un valore che dipende da R1 e C1 e che, considerando gli effetti della rete aggiuntiva dell'elemento non lineare, determina un ciclo limite in banda audio pari a circa 1,15kHz; R7 invece è un trimmer che nelle successive simulazioni è posto a circa il 40% del suo massimo valore (orientativamente intorno agli 800Ω). Per eseguire in ambiente simulato il sensing della corrente che attraversa l'induttore è stato posto in serie ad esso una resistenza serie RS da 1Ω, nella pratica questo resistore può anche essere sostituito da un cortocircuito qualora non fosse indispensabile osservare le traiettorie.

Anche in questo caso il sistema dinamico include la modifica proposta da Elwalkil-Kennedy per cui l'effetto moltiplicativo della terza equazione del sistema di Rössler viene sostituita da uno switch non lineare ottenuto dalla presenza del diodo D1. L'evoluzione temporale della funzione caotica dell'oscillatore proposto da Corron è rappresentata in fig.2.1.11.

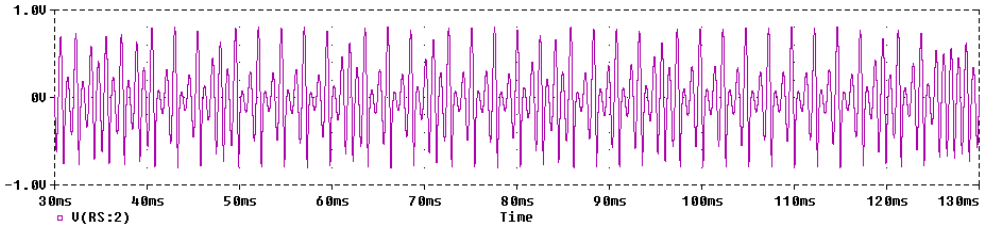

Fig.2.1.11 Andamenti temporali della variabile V_{c2} nel circuito di N. Corron

Analogamente agli altri oscillatori presentati in precedenza è possibile osservare anche le traiettorie ottenute da quest'ultimo sistema oscillante attraverso una proiezione in 2D della corrente che attraversa l'induttore rispetto alla tensione presente sulla capacità C2, vedi fig.2.1.12.

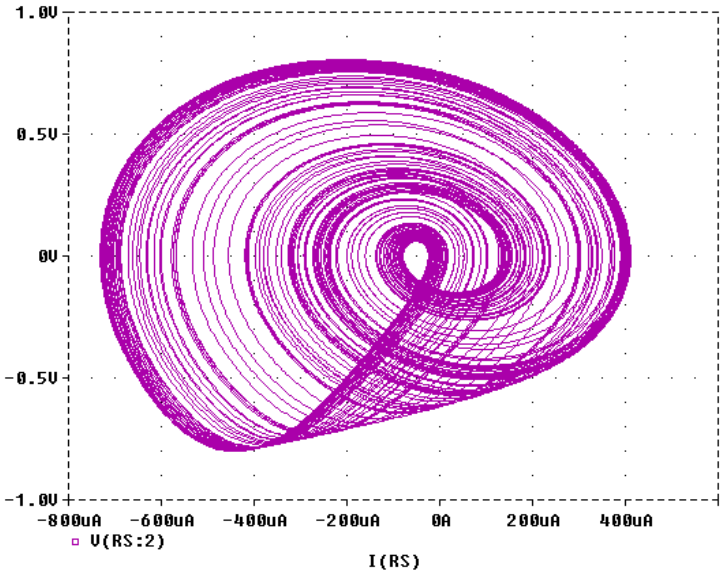

Fig.2.1.12 Traiettorie ottenibili con il sistema oscillante di fig.2.1.10

Le equazioni che descrivono il funzionamento dell'oscillatore instabile LC proposto da Ned Corron sono le seguenti:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,i_L}{d\,t}=v_C \\ C\dfrac{d\,v_C}{d\,t}=\dfrac{v_C}{R7}-i_L+\dfrac{v_F-v_C}{R8}-i_D \\ C\dfrac{d\,v_F}{d\,t}=\dfrac{-v_F}{R8}-\begin{cases} \dfrac{V_D+v_C}{R9}, & v_C\leqslant -V_D \\ 0, & v_C>-V_D \end{cases} \end{cases} \qquad [5]$$

dove i_L è la corrente che scorre nell'induttore e $V_D\simeq 0{,}7V$, ovvero la caduta tipica di un diodo al silicio a 300°K; gli altri parametri possono essere identificati osservando lo schema elettrico di fig.2.1.10. La funzione di switch introdotta dal diodo appare solo nella terza equazione ed è raccolta nel binomio posto all'interno delle due parentesi graffe.

La corrente nell'induttore non dipende da R4, come erroneamente si potrebbe immaginare, ma essa dipende dalle tensioni di uscita di U1A e U1B, rispettivamente v_1 e v_2 , ma anche dai valori di R1 ed R2 in base alla seguente relazione:

$$i_L=\frac{v_2-v_1}{R1+R2} \quad \text{, se} \quad R2=R3 \qquad [6]$$

per ulteriori informazioni su come sia possibile ottenere induttanze di valore elevato utilizzando circuiti elettronici con operazionali si può fare riferimento al libro “Sistemi Oscillanti Caotici”, ISBN 979-8346122463, oppure in alternativa il libro “Le resistenze negative”, ISBN 979-8341103009.

Un modo ancora più semplice per schematizzare il circuito oscillante proposto da Connor è mostrato in fig.2.1.13; il blocco “N” rappresenta la resistenza negativa indispensabile per innescare l'oscillazione, R_D è la re-

sistenza differenziale che offre il diodo quando esso è in conduzione e V_{LIM} è la tensione di soglia regolabile con cui si stabilisce l'intervento del diodo.

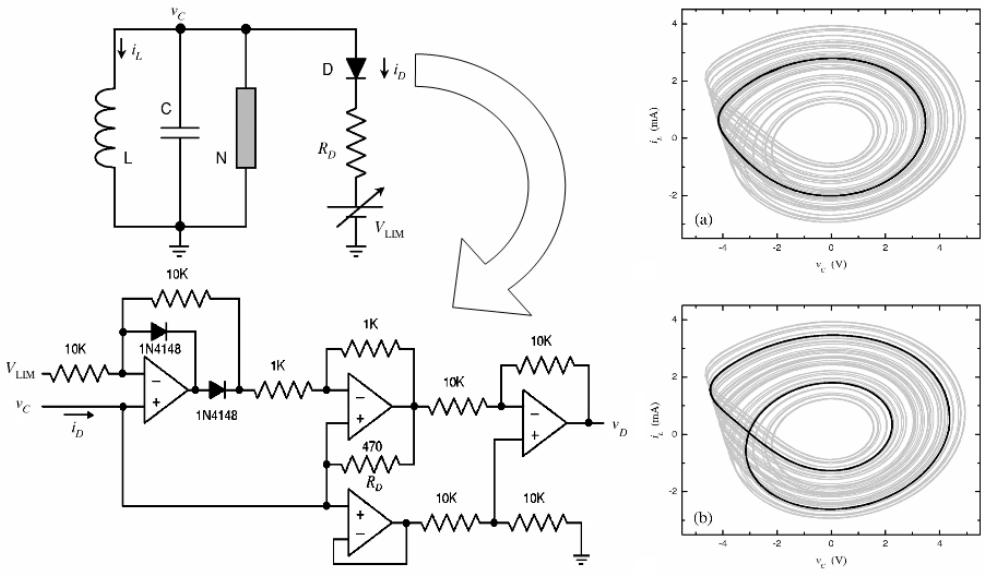

Fig.2.1.13 Circuito equivalente dell'oscillatore di Corron con diodo ideale

Il circuito che simula un diodo ideale a soglia regolabile è rappresentato in basso, in questo caso il valore di R_D è settato a 470Ω (vedi il feedback positivo del secondo operazionale).

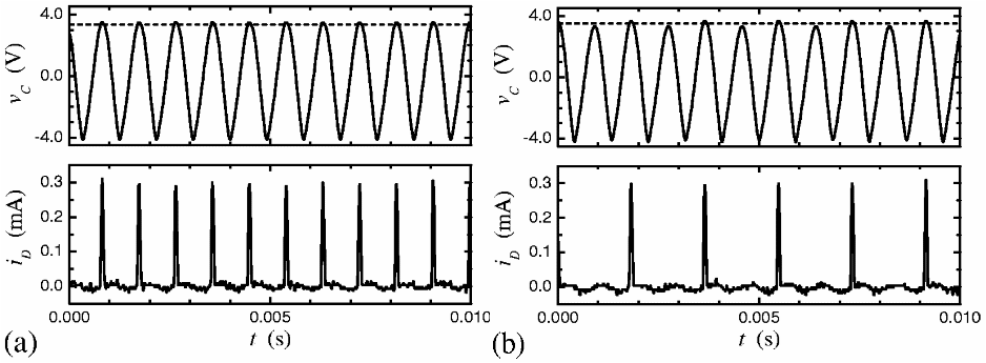

Fig.2.1.14 Selezione della soglia del diodo ideale nel circuito equivalente all'oscillatore di Rössler proposto da Corron

La soglia di intervento del diodo determina l'evoluzione delle traiettorie nell'oscillatore e pertanto la tensione V_{LIM} rappresenta la sua tensione di controllo, vedi i due esempi per ottenere cicli limite con o senza biforcazione del tipo “period doubling” riportate in fig.2.1.14. Con una tensione di $V_{LIM}=3{,}47\,V$ si ottiene un ciclo limite definito come “period-1 UPO” (Unstable Period Orbit); con una tensione di $V_{LIM}=4{,}31\,V$, invece, si ottiene in ciclo limite “period-2 UPO” (che identifica la prima biforcazione); la successiva scomparsa del controllo nella perturbazione per $V_{LIM}>4{,}5\,V$ determina l'abbandono dell'attrattore e il conseguente deriva verso il caos incontrollato.

Nel caso specifico, considerando la polarità del diodo, si ha che:

$$i_D=\begin{cases} 0\,, & v_C\leqslant V_{LIM} \\ \dfrac{v_C-V_{LIM}}{R_D}\,, & v_C>V_{LIM} \end{cases} \qquad [7]$$

mentre la corrente effettiva che scorre nel diodo limitatore è:

$$i_D=\frac{v_D}{R_D} \qquad [8]$$

Nello schema elettrico di fig.2.1.13 la tensione di uscita v_D è una tensione direttamente proporzionale alla corrente i_D e pertanto tale uscita può essere utilizzata come “monitor” per regolare in modo fine la tensione di soglia V_{LIM} del diodo ideale; sulla destra di tale figura sono rappresentate in modo grafico le due possibilità di selezione mostrate in fig.2.1.14(a e b).

2.1.2 Oscillatore ipercaotico con una linea di trasmissione CPLM

La possibilità di controllare un oscillatore caotico ha aperto un ventaglio di interessanti applicazioni nel settore della crittografia delle informazioni sensibili, anche in campo militare; fu lo stesso Ned Corron a proporre nel 1997 l'esempio di un sistema di comunicazione analogico crittografato con

un modulatore e un demodulatore basati entrambi sul circuito oscillante caotico inventato da Leon Ong Chua nel 1983. Dal punto di vista implementativo nell'ambito della crittografia, il sistema dinamico caotico proposto da Rössler rimase “nel cassetto” per molti anni a causa della maggiore complessità nel poterlo realizzare dal punto di vista pratico; fino a quando non vi fu l'avvento della famosa modifica indicata da Elwalkil-Kennedy, e qui già trattata nel par.1.1.3, che ne semplificò notevolmente quest'ultimo aspetto a partire dal 1999.

Dr. Jonathan Blakely

Con questi presupposti il Dr. Jonathan Blakely del Redstone Arsenal in Alabama, un altro Dipartimento distaccato di ricerca per la Difesa Militare U.S.A., ha iniziato ad esplorare la possibilità di utilizzare il sistema dinamico di Rössler modificato per sviluppare nuovi metodi di encryption, stavolta applicati a flussi numerici (dati seriali). Non solo: egli nel 2005 ha presentato l'esempio di un sistema TX-RX per n.2 flussi di dati seriali multiplexati e codificati con l'oscillatore caotico proposto da Corron sopra descritto nel par.2.1.1; lo schema a blocchi di tale implementazione è riportato in fig.2.1.15

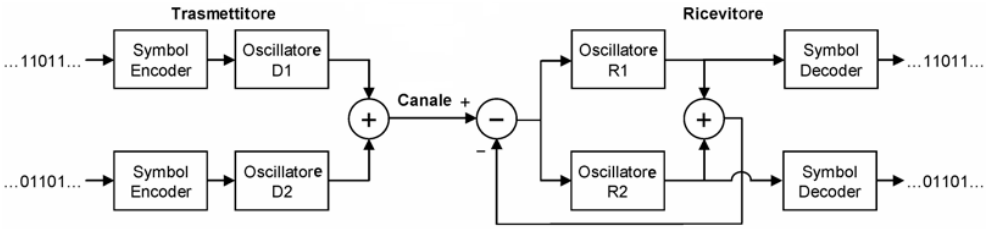

Fig.2.1.15 Schema a blocchi del sistema di multiplazione proposto da J. Blakely nel 2005 e realizzato in collaborazione con Ned Corron

Con questa implementazione Blakely ha dichiarato un tasso di errore (BER) pari al 2% su uno dei due flussi e il 6% sull'altro; dal punto di vista pratico non si tratta affatto di bei numeri, anzi, un esperto di comunicazioni forse direbbe anche qualcosa di peggio. Tuttavia bisogna anche considerare

che questo tasso di errore è stato valutato senza prevedere nessun metodo di correzione; implementando un controllo di parità, un CRC, un FEC e magari anche un protocollo di ridondanza supplementare in caso di errore questi tassi così elevati verrebbero abbattuti sensibilmente; se poi volessimo utilizzare una elaborazione numerica (con DSP) al posto di un semplice circuito analogico realizzato con operazionali il risultato sarebbe nettamente superiore a quello dichiarato da Blakely, probabilmente si riuscirebbe anche a raggiungere un tasso di errore pari a zero.

In questa trattazione però non ci occuperemo di questo nuovo sistema di comunicazione, però ci ha fatto comodo introdurre il nome di Jonathan Blakely per un altro aspetto molto più interessante: egli, in qualche modo e con l'aiuto di Ned Corron, è riuscito ad implementare un sistema dinamico instabile non lineare (e quindi un oscillatore caotico) che in grandi linee ricalca ciò che avevamo definito sopra un "GRS", ovvero un Generic Rössler System; e lo ha realizzato utilizzando una architettura piuttosto semplice che sfrutta il modello di una linea di trasmissione a costanti concentrate, o CPLM (Concentrated Parameter frequency-dependent Line Model) intestata con due diversi circuiti attivi di terminazione, uno dei quali non lineare.

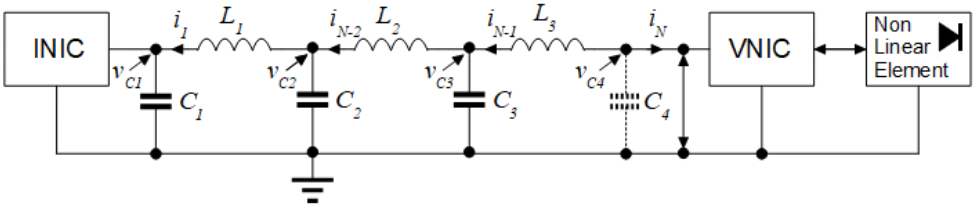

Fig.2.1.16 Schema a blocchi del sistema oscillante GRS inventato da J. Blakely nel 2005 e realizzato in collaborazione con N. Corron

La differenza fra il sistema dinamico non lineare di Rössler e un GRS (di G. Baier, e di S. Sahle) sta solo nel parametro aggiunto $"N"$ che rappresenta in numero di dimensioni di equazioni differenziali ordinarie: per $N=3$ il GRS assume le stesse caratteristiche di un canonico sistema di Rössler; per $N>3$ il sistema in alcune condizioni è in grado di produrre autonomamente traiettorie ipercaotiche senza la necessità di alcuna modulazione esterna. Ricordo che nella casistica contemplata da Baier e Sahle

N è sempre un numero dispari, anche se non è escluso che N possa anche essere un numero pari. Un sistema ipercaotico implica il fatto che esso sia in grado di determinare simultaneamente due o più situazioni di instabilità all'interno dello stesso sistema caotico, situazioni che si disturbano fra di loro in cui almeno una è dominante rispetto all'altra (o alle altre); e questa non è affatto una condizione semplice da "tradurre" nel comportamento di un circuito elettrico, per questo motivo l'implementazione di Blakely (e Corron) è davvero singolare. Lo scopo di questo suo sviluppo quasi certamente è quello di rendere sempre più incisiva la difficoltà di decrittare correttamente comunicazioni sensibili per scopi militari; lo sfruttamento delle teorie sui fenomeni caotici complessi offre un notevole contributo in questo settore della ricerca.

Per affrontare questo argomento innanzi tutto occupiamoci dei due circuiti di terminazione; in entrambi i casi trattasi di "giratori di conduttanza", tuttavia per realizzare un giratore di conduttanza completo servono almeno due "NIC" in cascata ovvero "Negative Impedance Converter"; in particolare i VNIC e gli INIC, sono rispettivamente i NIC che invertono la tensione oppure i NIC che invertono la corrente. La distinzione di queste due tipologie di circuito il lettore può trovarla osservando la fig.2.1.17, si faccia attenzione alla polarità all'ingresso degli operazionali.

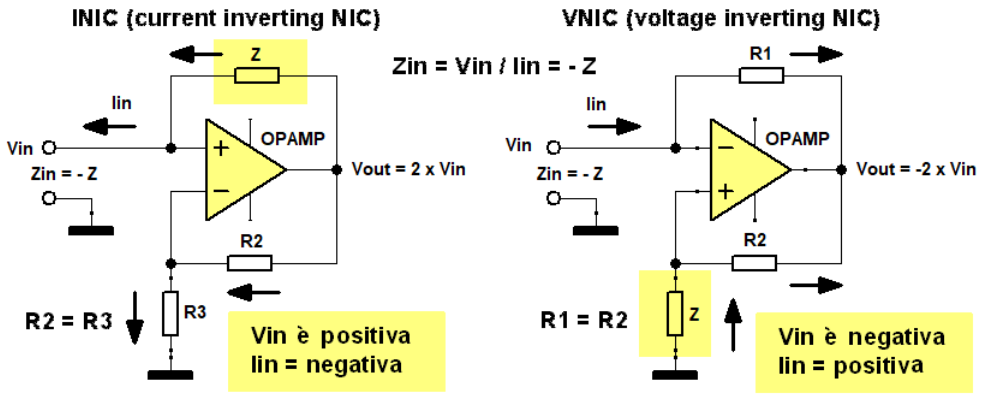

Fig.2.1.17 Distinzione fra le due tipologie di NIC, INIC e VNIC

Un modo per memorizzare più facilmente questa differenza consiste nel ricordare che i VNIC hanno sempre l'impedenza da ruotare verso massa. Di

solito si utilizzano due VNIC per invertire correttamente una impedenza, il primo trasforma ad esempio una capacità in una induttanza negativa e il secondo VNIC trasforma l'induttanza negativa in una positiva. Quindi per ottenere una inversione completa servono n.2 amplificatori operazionali, altrimenti con soltanto un amplificatore l'effetto che si ottiene è solo soddisfatto in parte, infatti la reattanza “girata” che si ottiene è negativa rispetto a quella necessaria, e non sempre questa soluzione può essere valida quando si deve realizzare un filtro attivo. La differenza fra una impedenza negativa e una positiva è proprio il verso delle correnti durante il funzionamento dinamico e questa non è proprio una cosa di poco conto, chi sviluppa filtri attivi ne sa qualcosa. Per quanto riguarda l'implementazione di Blakely entrambe le unità di terminazione vanno considerate come “resistenze negative” necessarie all'innesco dell'oscillazione primaria; l'elemento di switch non lineare che determina la produzione di orbite caotiche agisce solo sulla terminazione in cui è presente il VNIC, vedi il circuito a destra di fig.2.1.18.

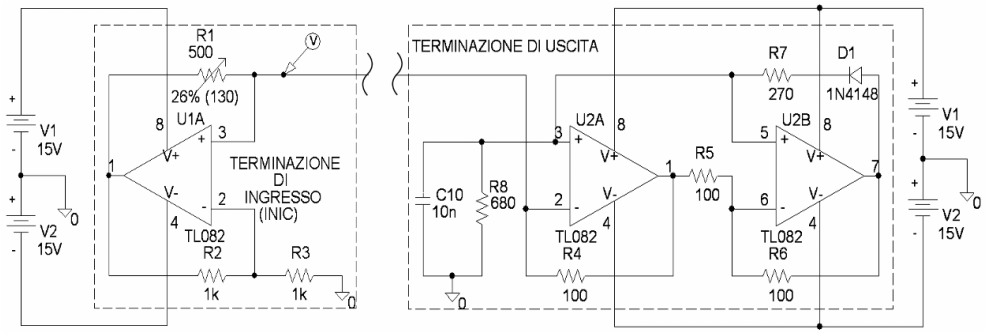

Fig.2.1.18 Schema elettrico delle due terminazioni della linea CPLM

Ora, in mezzo a questi due elementi attivi, uno lineare e l'altro non-lineare, Blakely ha inserito uno o più elementi reattivi allo scopo di produrre traiettorie caotiche su tre o più dimensioni; se consideriamo un tratto di linea di trasmissione, omogenea, unifilare o bifilare, a coppie simmetriche o coassiali per unità di lunghezza x , esso è caratterizzato da quattro costanti primarie, $R, L, C e G$ come da modello mostrato in fig.2.1.19. Per ogni segmento di linea Δx avremo quindi una resistenza $R\Delta x$, una induttanza $L\Delta x$, una capacità $C\Delta x$ e una conduttanza $G\Delta x$; la serie della resistenza e dell'induttanza costituiscono l'impedenza $Z\Delta x$,

mentre il parallelo della capacità con la conduttanza costituiscono l'ammettenza $Y\Delta x$; la tensione di ingresso al segmento di linea la chiameremo V e la corrente che vi scorre la chiameremo I .

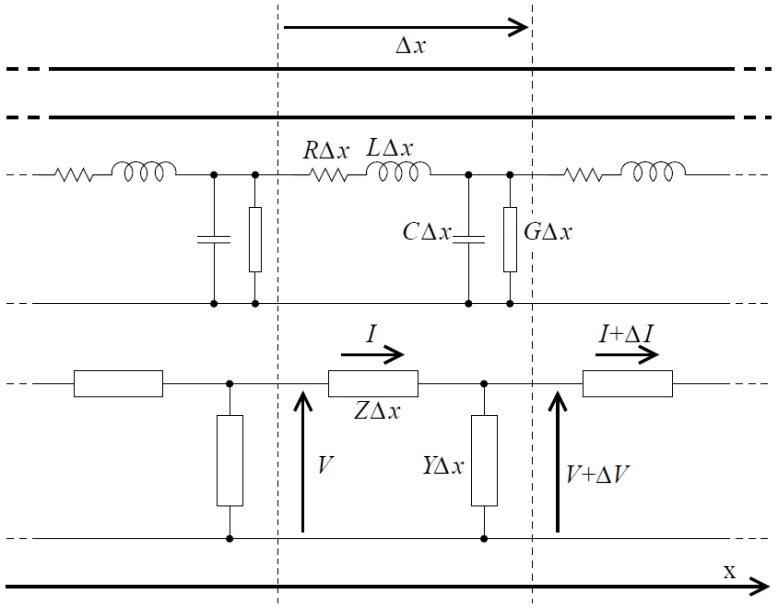

Fig.2.1.19 Modello di un segmento Δx di una linea di trasmissione

Se consideriamo il segmento Δx una quantità monodimensionale, la serie di "*N*" quantità determina una quantità multidimensionale in funzione di *"N"*; facendo riferimento alla teoria di un GRS, il numero "*N*" introdotto da Baier e Sahle serve proprio a stabilire il numero di dimensioni in cui si evolve il sistema. A questo punto Blakely ha pensato bene di ricreare un sistema GRS con una serie di segmenti di linea (*N*), modellati e realizzati semplicemente con dei parametri concentrati; le estremità di tale linea però devono essere comunque terminate da elementi attivi necessari per innescare l'instabilità e quindi l'insorgenza di traiettorie a spirale in espansione sui piani principali (x, y e z), ad esempio due diversi circuiti che invertono il verso di correnti e/o tensioni, in cui uno dei due deve necessariamente essere non lineare per rispettare la terza equazione del sistema di Rössler. Anche in questo caso non è importante se tale "non linearità" sia di tipo "moltiplicativo" oppure di tipo "switch" come quello proposto da Elwalkil-Kennedy.

Ricapitoliamo ora alcuni concetti fondamentali sulle linee di trasmissione che poi serviranno in seguito; applicando un segnale sinusoidale di pulsazione ω all'origine della linea (all'estremità trasmittente) nell'ipotesi che le costanti primarie siano lineari, cioè che non cambino al variare del flusso della corrente in linea, è possibile calcolare la tensione e la corrente istantanea in un punto qualsiasi distante x dall'origine mediante le formule:

$$\begin{cases} V_x = \frac{1}{2}\left(V_i + I_i Z_0\right)\mathrm{e}^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(V_i - I_i Z_0\right)\mathrm{e}^{\gamma x} \\ I_x = \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{Z_0} + I_i\right)\mathrm{e}^{-\gamma x} - \frac{1}{2}\left(\frac{V_i}{Z_0} - I_i\right)\mathrm{e}^{\gamma x} \end{cases} \qquad [1]$$

dove V_i e I_i sono la tensione e la corrente all'entrata della linea, e:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \qquad [2]$$

$$\gamma = \sqrt{\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right)} \qquad [3]$$

sono le costanti secondarie della linea chiamate rispettivamente impedenza caratteristica e costante di propagazione; l'impedenza all'ingresso di una linea di trasmissione vale:

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} \qquad [4]$$

Z_i , in generale, risulta essere una funzione, oltre che dell'impedenza caratteristica della linea, anche della sua lunghezza ℓ e dell'impedenza Z_L su cui è chiusa la stessa linea all'arrivo, all'estremità ricevente;

se $\ell = \infty$ oppure se $Z_L = Z_0$ allora $Z_i = Z_0$ [5]

Se ne conclude che una linea di trasmissione tende a presentare un comportamento indipendente dall'impedenza di chiusura col tendere all'infinito della sua lunghezza; allo stesso modo tale comportamento si verifica, qua-

lunque sia la sua lunghezza, se la linea è chiusa sulla sua impedenza caratteristica. In questi due casi le equazioni che determinano la tensione e la corrente in un punto alla distanza x dall'origine, in funzione della tensione e della corrente applicate all'origine, diventano:

$$\begin{cases} V_x = V_i \, \mathrm{e}^{-\gamma x} \\ I_i = \dfrac{V_i}{Z_0} \, \mathrm{e}^{-\gamma x} \end{cases} \qquad [6]$$

queste vengono chiamate universalmente “equazioni dei telefonisti” essendo quelle di uso corrente nell'ambito della telefonia.

Ma la costante di propagazione γ , essendo una grandezza complessa, può essere anche posta sotto la forma seguente:

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad [7]$$

dove α , detta “costante di attenuazione”, rappresenta l'attenuazione della linea per unità di lunghezza (supponendo che essa sia chiusa sulla sua impedenza caratteristica) e perciò si misura in neper/km; invece β è detta “costante di fase” e rappresenta l'angolo di cui ritarda la fase del segnale rispetto all'origine per unità di lunghezza, pertanto si misura in radianti/km.

Il modello di linea per questo circuito non deve presentare elementi dissipativi in grado di produrre attenuazione, pertanto $R = G = 0$, in tale situazione $Z_0 = \sqrt{L/C}$, vedi la [2]; inoltre è indispensabile anche un modesto disadattamento del carico a valle della linea, un disadattamento tale che $1{,}3\,Z_0 < Z_L < 2\,Z_0$, vediamo ora questo cosa significa.

Il coefficiente di riflessione di una linea disadattata è espresso come:

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad [8]$$

dove V_r rappresenta l'ampiezza della tensione riflessa mentre V_i è la tensione incidente (quella applicata all'ingresso della linea); pertanto

esso può essere un valore sia positivo che negativo in funzione di Z_L e di Z_0 ; ma indipendentemente dal segno il disadattamento in fondo è identico e produce gli stessi effetti sull'onda riflessa, per questo motivo di solito si usa il modulo del coefficiente di riflessione che è espresso da:

$$r=|\Gamma| \qquad [9]$$

a questo punto il rapporto delle onde stazionarie è così concepito:

$$VSWR=\frac{1+r}{1-r} \qquad [10]$$

essendo r il modulo di V_r/V_i è possibile calcolare l'attenuazione di riflessione in termini di decibel, ovvero:

$$A_{rif}=-10\log\left(r^2\right)=-20\log\left(r\right) \qquad [11]$$

nelle condizioni di disadattamento sopra indicate il circuito di Bakely produce traiettorie caotiche di complessità crescente in funzione del numero degli stadi LC di cui è composto il modello di linea; tale comportamento ricorda proprio il comportamento di un GRS in cui la funzione ottenuta acquisisce proprietà ipercaotiche sempre maggiori all'aumentare di N , ovvero il numero di dimensioni di equazioni differenziali ordinarie.

Nel suo articolo Blakely definisce N come “dimensioni finite di spazi di fase” per concepire il suo circuito analogico atto a simulare un GRS; per fare questo ripropone il sistema di Baier e di Sahle nella forma seguente:

$$\begin{cases} \dot{x_1}=\alpha\, x_1-x_2 \\ \dot{x_k}=x_{k-1}-x_{k+1} \qquad k=2,\ldots,N-1 \\ \dot{x_N}=-\gamma\, x_N+g\left[x_N,x_{N-1}\right] \end{cases} \qquad [12]$$

in cui $x_i, i=1,2,\ldots,N$ sono variabili dinamiche, mentre la variabile $\alpha>0$, presente nella prima equazione, rappresenta il guadagno lineare del sistema che, come vedremo successivamente, dipende anche dalla resistenza negativa di terminazione $R=Z_L$ che induce il disadattamento e

pertanto anch'essa inciderà sulle sue proprietà ipercaotiche; infine $\gamma > 0$ definisce la risposta temporale della non-linearità $g[\cdot]$.

In questo contesto si assume che tale non-linearità sia così composta:

$$g\left[x_{N-1}\right] = \beta\, max\left(0, x_{N-1} - \delta\right) \qquad [13]$$

dove β e δ sono due parametri fissi che vedremo in seguito, mentre la funzione $max(\cdot,\cdot)$ definisce il maggiore fra questi due argomenti. In fig.2.1.20 è rappresentato il modello di circuito da analizzare; il sottosistema lineare è costituito dalle prime due equazioni del sistema [12], esso consiste in una serie di dipoli realizzati da condensatori e induttanze collegati in serie fra loro e terminati su ambo i lati da circuiti che simulano resistenze negative mediante l'inversione delle correnti o delle tensioni.

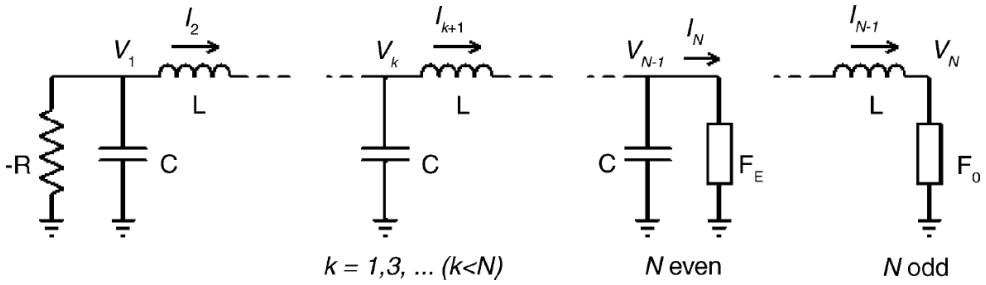

Fig.2.1.20 Modello per l'analisi del sistema proposto da J. Blakely

Va sottolineato che il numero "*N*" della teoria GRS originale introdotta da Baier e Sahle non coincide esattamente con il numero "*N*" dei segmenti di linea nel circuito di Blakely, nonostante vi siano molte affinità fra questi due numeri dal punto di vista comportamentale; oltretutto nella teoria originale "*N*" era soltanto un numero "dispari" (odd, 3, 5, 7, ecc.) mentre Blakely contempla anche la possibilità che "*N*" sia un numero "pari" (even), vedi fig.2.1.20. Per questo motivo egli distingue due diversi tipi di terminazione non lineare, F_O ed F_E, con altrettanti circuiti dedicati. Ebbene qui iniziano a sorgere alcune imprecisioni nella teoria di Blakely: due INIC, così come due VNIC, non possono coesistere agli estremi opposti di una linea di trasmissione (con o senza parametri dissipativi); nel caso in cui il fenomeno

ondulatorio che si viene a stabilire all'interno della linea abbia caratteristiche di natura caotica avviene uno squilibrio nella polarizzazione dei due circuiti tale che uno dei due diventa dominante rispetto all'altro il quale, dopo un breve tentativo iniziale di produrre traiettorie caotiche, pone l'uscita dell'operazionale in condizioni di saturazione bloccando così definitivamente qualsiasi fenomeno di instabilità. L'eterogeneità dei due circuiti posti agli estremi della linea, un INIC e un VNIC, impedisce che si verifichi tale situazione, qualunque sia la natura del fenomeno ondulatorio che si viene a stabilire lungo il modello di linea, indipendentemente dalla sua complessità.

Rapp. Numerica	Rapp. Grafica (schema)	Valore	Note
$Z_L = R$	R1	130Ω	$130\Omega < R < 2Z_0$
R_T	R4, R5, R6	100Ω	$R_T = Z_0$
R_D	R7	270Ω	R diodo “on”
R_f	R8	680Ω	R feedback
L	L1, L2, L3, …, LX	1mH	$\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$
C	C1, C2, C3, … CX	100nF	
C_f	C10	10nF	C feedback

Tabella 2.1.1 Riferimenti incrociati fra formule e schemi elettrici

Tale evento è stato verificato con due diversi sistemi di sviluppo SPICE, pertanto in ambienti di simulazione differenti ma anche con modelli alternativi di amplificatori operazionali, tutti col medesimo risultato. Dal punto di vista logico può avere un senso utilizzare terminazioni omogenee nel caso in cui il segmento del modello di linea fosse simmetrico alle due estremità (ad esempio nel caso in cui “*N*” = even), tuttavia la realtà purtroppo fornisce dei risultati inediti che non possono essere ignorati; per questo motivo in questo contesto verranno analizzati soltanto esempi di sistemi oscillanti caotici e ipercaotici dotati di terminazioni eterogenee.

Invero Blakely nel suo articolo non fa molti riferimenti a “linee di trasmissione” utilizzate per sviluppare oscillatori caotici, per quanto i valori delle terminazioni da lui calcolati negli esempi da lui riportati siano sempre

stati dimensionati sfruttando le teorie di tali linee, vedi tabella 2.1.1; ma non fornisce nemmeno indicazioni sulla relazione che esiste fra il livello e le fasi delle onde stazionarie prodotto dal disadattamento delle terminazioni lungo la linea e la qualità dei fenomeni caotici o ipercaotici che ne deriva, su questo punto lui non ha dedicato nemmeno una riga nei suoi scritti; e lo stesso dicasi per ciò che accade al sistema variare di "*N*", sia nel caso in cui tale numero sia pari o dispari. Egli si limita a fornire soltanto indicazioni frammentarie nel dominio del tempo e prelevando l'andamento della tensione fluttuante nel punto meno indicato per eseguire tali valutazioni (la tensione ai capi del del condensatore più prossimo all'unica terminazione che determina il disadattamento della linea, di ciò che accade all'altro estremo non vi sono indicazioni di alcun tipo). Probabilmente alcune di queste informazioni potrebbero essere state sottoposte a segreto militare, vista l'attuale posizione professionale dell'Autore di tale sviluppo, e questo sarebbe pure comprensibile.

Un semplice modello del sottosistema lineare può essere definito come:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV_1}{dt}=\dfrac{V_1}{R}-I_2 \\ L\dfrac{dI_k}{dt}=V_{k-1}-V_{k+1} \quad , \quad k=2,4,\ldots(k<N) \\ C\dfrac{dV_k}{dt}=I_{k-1}-I_{k+1} \quad , \quad k=3,5,\ldots(k<N) \end{cases} \qquad [14]$$

dove V_1 è la tensione ai capi di C1 cioè del primo condensatore che si incontra sullo schema a partire da sinistra, ovvero la capacità del dell'ultimo segmento di linea prima della terminazione INIC; tale elemento inverte il verso della corrente in base al valore istantaneo della tensione; sul lato opposto il VNIC inverte il verso della tensione in base al flusso di corrente I_{N-1} che circola nell'ultimo induttore sulla destra. Per quanto riguarda la struttura "even" non potendo utilizzare un altro INIC sul lato destro (vedi sopra le motivazioni) useremo comunque un VNIC che invertirà il verso della tensione ai capi dell'ultimo condensatore posto sul lato destro della linea

rispetto alla corrente I_N che fluisce sulla terminazione R4 e che, di conseguenza, sarà così inversamente proporzionale alla tensione V_{N-1} . In questo contesto il risultato è indifferente, nella maggior parte dei casi, una resistenza negativa rimane tale indipendentemente se essa inverte la corrente o la tensione; pertanto il verso di I_N di fig.2.1.20, per coerenza, andrebbe ribaltato rispetto alle altre correnti. Anzi, per essere precisi sarebbe più corretto ribaltare il verso di tutte le altre correnti rispetto a I_N , come del resto indicato nello schema a blocchi riportato in fig.2.1.16.

La terminazione F_O può essere modellata con l'equazione:

$$C_f \frac{dV_N}{dt} = -\frac{V_N}{R_f} + \frac{1}{R_D} \; max\left(0,\, R_T I_{N-1} - V_D\right) \qquad [15]$$

dove V_D è la tensione di caduta sul diodo, $R_T = \sqrt{L/C}$, R_f e R_D sono resistori "fissi" i cui valori si trovano nella tabella 2.1.1, mentre C_f è la capacità di feedback che limita la risposta temporale della terminazione. Invece la terminazione F_E, costituita da un VNIC, può essere modellata con l'equazione:

$$C_f \frac{dI_N}{dt} = -\frac{I_N}{R_f} + \frac{1}{R_T R_D} \; max\left(0,\, V_{N-1} - V_D\right) \qquad [16]$$

dove la tensione V_{N-1} rappresenta la tensione sul piedino invertente dell'operazionale IC2A e I_N è la corrente che fluisce nel resistore R4, vedi fig.2.1.18. La terminazione sul lato opposto della linea (lato sinistro) è realizzato con un circuito lineare a resistenza negativa (INIC) che fa capo all'operazionale U1A il cui valore dipende direttamente da R1. Una sostituzione delle variabili nelle equazioni [14], [15] e [16] dimostrerebbe una sostanziale equivalenza nella struttura di un tipico sistema GRS, vedi la [12] e la [13].

Impostiamo ora alcune variabili adimensionali, iniziamo col tempo:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}} \qquad [17]$$

e adesso impostiamo anche le seguenti variabili:

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{V_k}{V_D},\ k=1,3,\ldots(k\leqslant N) \\ \sqrt{\dfrac{L}{C}}\dfrac{I_k}{V_D},\ k=2,4,\ldots(k\leqslant N) \end{cases} \qquad [18]$$

dove V_D è sempre la tensione di caduta del diodo in polarità diretta, per un diodo al silicio come quello indicato sullo schema esso si attesta intorno agli 0,7V a 300°K (27°C). A questo punto la relazione fra i parametri del circuito e quella del sistema GRS sono così definite:

$$\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{LC}}{R_f C_F} \quad , \quad \gamma = \frac{\sqrt{LC}}{R_D C_F} \quad , \quad \delta = 1 \qquad [19]$$

e questo vale sia nel caso di una terminazione di tipo “odd” che una terminazione di tipo “even” (che nel nostro caso sono identiche per i motivi sopra enunciati).

In fig.2.1.21 sono riportati gli schemi elettrici completi dei circuiti oscillanti caotici proposti da Blakely; nei due esempi troviamo sia la configurazione con il modello di linea di tipo “odd” che quella in cui il modello della linea è di tipo “even”. La differenza fra i due, in fondo, è l'aggiunta del solo condensatore C4 sul lato destro della linea trasformando così un sistema GRS in cui $N=3$ (in alto) in un sistema GRS in cui $N=4$ (in basso). Quello che Blakely non dice nel suo articolo è che questi circuiti funzionano in modo ipercaotico solo quando la linea è disadattata, cioè in presenza di riflessioni e con $R>Z_0$, vedi tabella 2.1.1. La loro ampiezza deve essere sufficiente per “disturbare” l'inviluppo che giunge alla terminazione non lineare (quella posta a destra), ma non deve essere nemmeno così esagerata da diventare “dominante” rispetto al segnale ondulatorio originale privo di distorsione. L'aggiunta del condensatore C4 sull'estremo di destra della linea, di fatto, aggiunge inevitabilmente una ulteriore riflessione di tipo reattivo proprio in prossimità della terminazione non lineare.

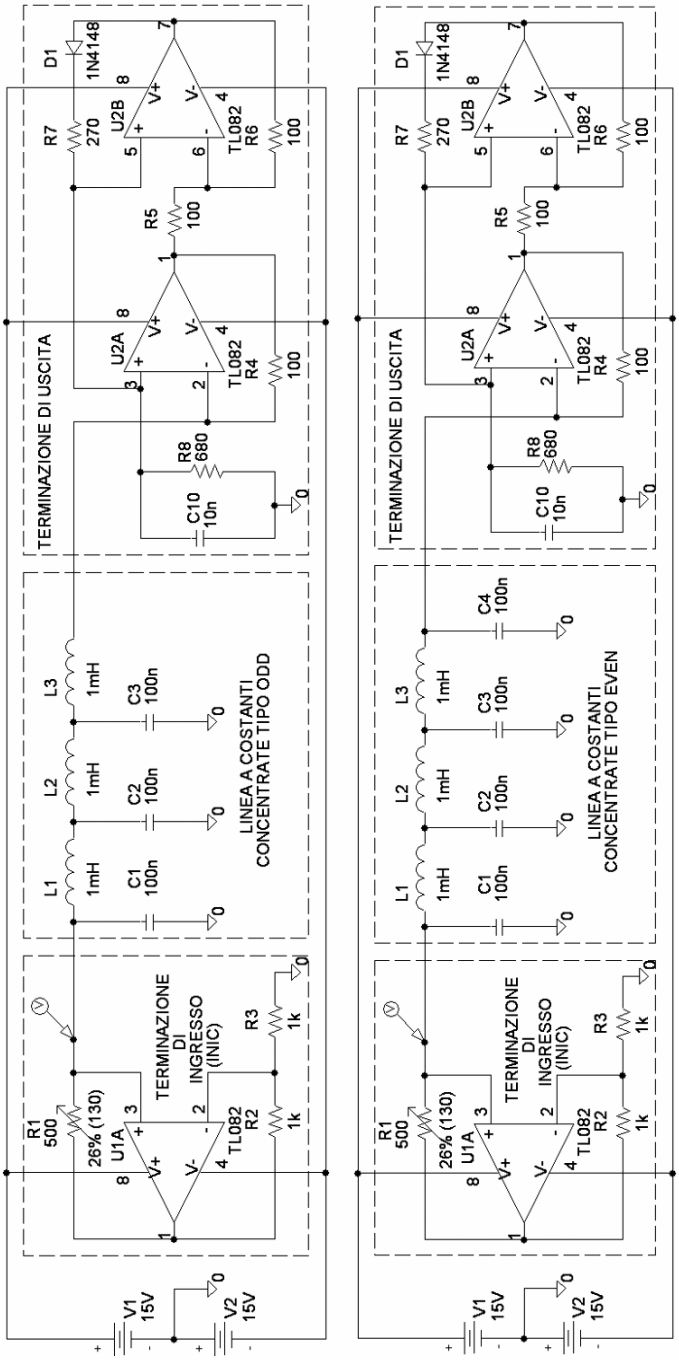

Fig.2.1.21 Circuito oscillante caotico di Blakely: in alto con modello di linea tipo "odd"; in basso con modello tipo "even"

Il modello di un segmento di linea di trasmissione non prevede una simmetricità fra i suoi due estremi, vedi fig.2.1.19; per questo motivo tale modello non può avere due capacità agli estremi e nemmeno due induttanze, altrimenti così il calcolo dell'impedenza non avrebbe senso. Osservando lo schema elettrico di fig.2.1.21, in alto, è abbastanza evidente che il segmento di linea considerato nella configurazione “odd” inizia da quella che è stata definita “terminazione di uscita” e finisce laddove è presente il circuito denominato “terminazione di ingresso”; pertanto, per come è disposta la linea, il segnale incidente all'ingresso della linea proviene da destra e non da sinistra, come sarebbe più facile ipotizzare. Se il valore di R1 fosse di 100Ω, cioè esattamente il valore dell'impedenza della linea, l'effetto che si ottiene è semplicemente un ciclo oscillante a singolo tono, parzialmente distorto dalla terminazione non lineare presente a monte, quella sul lato destro. L'aumento del valore di R1 causa riflessioni sull'onda incidente che, oltre un certo limite (VSWR=1,25-1,3), induce il circuito a produrre orbite ipercaotiche; l'aggiunta di C4 determina una ulteriore riflessione direttamente a monte della linea che aggiunge altre riflessioni che si sommano a quelle prodotte dalla terminazione a valle, che si propagano lungo la linea e che a loro volta incidono sull'intero comportamento ipercaotico del circuito.

Si tratta quindi di focalizzare due diverse modalità di funzionamento: quando $N=3,5,7,ecc.$ il modello di linea lavora con una singola riflessione prodotta a valle della linea; quando $N=4,6,8,ecc.$ tale modello lavora con due riflessioni, una a monte e una a valle. Pertanto due riflessioni diverse equivale a sondare due comportamenti diversi di uno stesso circuito; e per comprendere meglio quali sono queste differenze è stata adottata una apposita strategia: per studiare il comportamento nel dominio del tempo e della frequenza nelle varie simulazioni si è usato sempre lo stesso livello di riflessione sul lato sinistro della linea (quello a valle dove è presente la resistenza negativa lineare realizzata con un INIC e impostando un VSWR=1,3); dopodiché si è variato esclusivamente il fattore dimensionale N incrementando il numero delle celle LC lungo il modello del tratto di linea e/o inserendo all'occorrenza la capacità supplementare all'ingresso di quest'ultima per implementare la modalità di funzionamento “even”.

Per quanto riguarda il punto di misura per il momento si è considerato esclusivamente quello proposto da Blakely, ovvero la tensione ai capi del primo condensatore sulla destra del modello di linea, nel nostro caso C1. Con questi presupposti sono stati ottenuti i risultati riportati in fig.2.1.22.

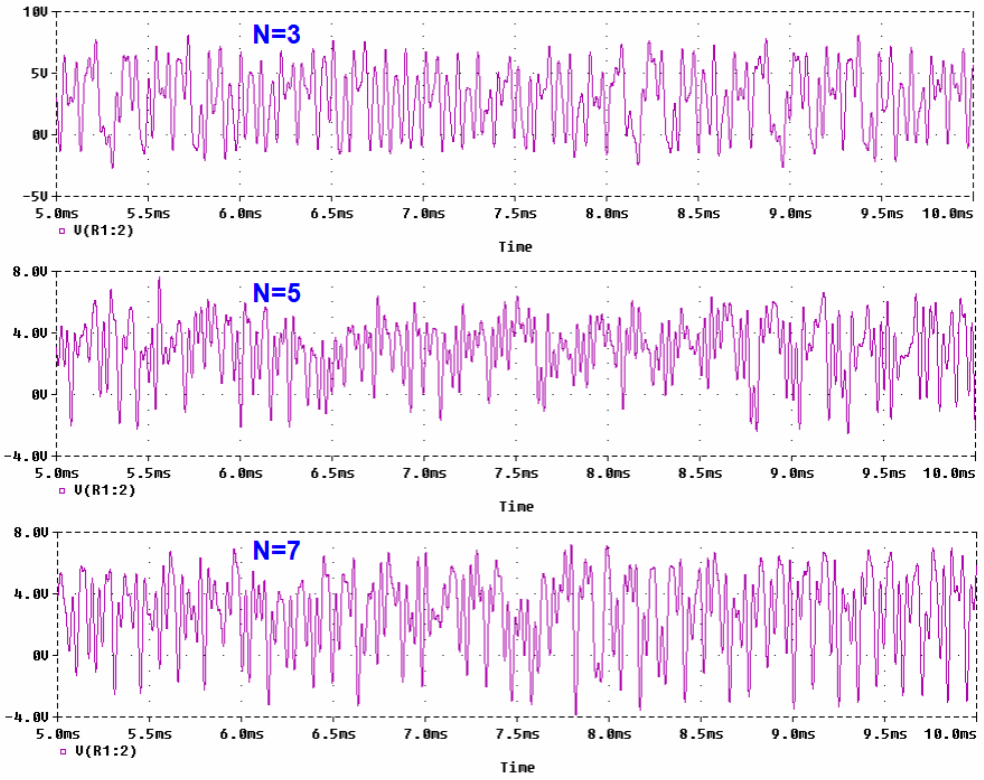

Fig.2.1.22 Simulazioni nel dominio del tempo del circuito di fig.2.1.21 (in alto) con N=3, con N=5 (con n.2 celle LC supplementari) e con N=7

Si noti come, all'aumentare di N , vi sia un conseguente aumento del livello di caoticità nell'inviluppo distribuito sull'asse Y per unità di tempo. Nel caso in cui $N=7$ sono state aggiunte altre quattro celle LC supplementari, oltre a quelle già presenti nel circuito di fig 2.1.21 (in alto), per un totale di 3+4=7 celle LC uguali fra loro terminate come da schema elettrico.

Il comportamento caotico del circuito cambia sensibilmente con l'aggiunta della capacità di chiusura sul lato della terminazione non lineare; al-

l'apparenza il sistema sembra presentare un comportamento meno caotico, tuttavia come vedremo successivamente il livello di caoticità aumenta con la stessa progressione di un GRS, come del resto è dimostrato da Blakely. Le simulazioni nel dominio del tempo in modalità "even" per $N=4$ e per $N=6$ sono raccolte in fig.2.1.23.

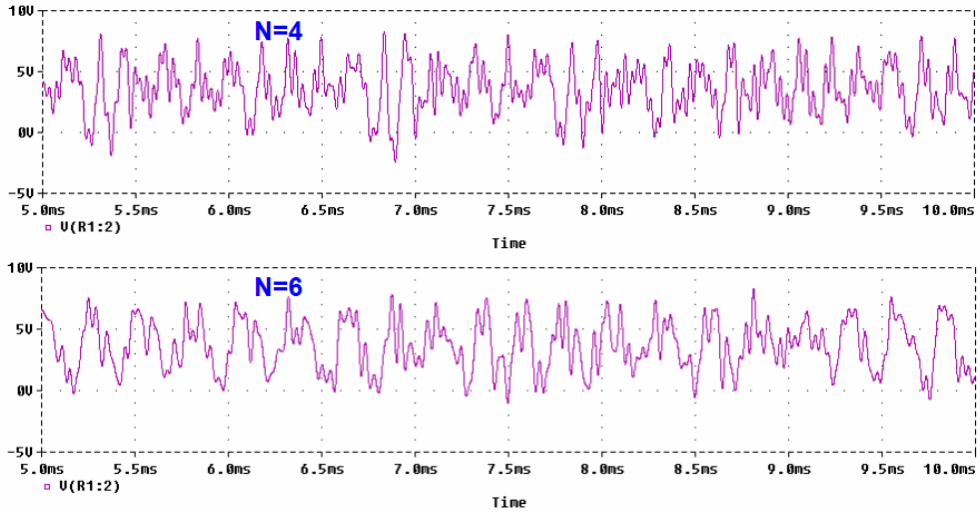

Fig.2.1.23 Simulazioni nel dominio del tempo del circuito di fig.2.1.21 (in basso) con N=4, con N=6 (con n.2 celle LC in più + C di chiusura)

Nel caso specifico se $N=6$ il sistema sembra acquisire maggiore periodicità rispetto a quando $N=4$, tuttavia le successive analisi nel dominio della frequenza dimostrano una crescente complessità nelle orbite ipercaotiche del sistema, nonostante la presenza di una "dominante" più incisiva e meno caotica delle altre entità instabili presenti nel sistema.

2.1.3 Analogie fra un GRS e il sistema ipercaotico con linea CPLM

La cinematica delle traiettorie che i sistemi dinamici ipercaotici sviluppano nel tempo in uno spazio confinato è molto più complessa di quella di un semplice sistema caotico tradizionale in quanto è dovuta a più fenomeni oscillanti simultanei e disomogenei che si sovrappongono e che interagiscono fra di loro; un oscillatore caotico modulato, o meglio "disturbato" da una

sorgente esterna, fornisce la base per ottenere un perfetto inviluppo ipercaotico, anche se tale sorgente fosse costituita da un semplice ciclo limite che si ripete nel tempo (ad esempio una sinusoide); i sistemi ipercaotici come i GRS, invece, non hanno bisogno di segnali esterni per ottenere tale comportamento perché sono essi stessi a svilupparlo internamente creando più sistemi instabili oscillanti all'interno di un singolo sistema dinamico non lineare. Non è affatto semplice realizzare in pratica sistemi di questo tipo, di solito i circuiti elettrici che emulano sistemi ipercaotici sono sempre molto complessi ed è anche difficile farli funzionare correttamente perché basta poco per metterli in crisi. Il sistema sopra descritto proposto da Jonathan Blakely invece è quanto di più semplice si possa concepire per realizzare un sistema oscillante ipercaotico; con soli tre operazionali, un diodo e una manciata di altri componenti di facile reperibilità egli è riuscito a realizzare un ottimo sistema oscillante ipercaotico, stabile ed efficiente.

Di fatto tale sistema può essere definito un GRS per via delle analogie fra i due enunciati sotto l'aspetto analitico, tuttavia esistono delle situazioni di confine che mettono in luce alcune discrepanze rispetto al sistema originale sviluppato da Rössler, differenze che non possono essere del tutto ignorate; riprenderemo questo argomento alla fine del paragrafo.

Osservare la dinamicità delle traiettorie di un sistema dinamico CPLM (o GRS) nel dominio del tempo non è sufficiente per valutarne la caratteristica principale che è l'ipercaoticità; il modo più comune, ed anche quello più esaustivo, è invece quello di osservare il suo comportamento nel dominio della frequenza. L'analisi spettrale è infatti in grado di mostrare più efficacemente il numero delle dimensioni di equazioni differenziali ordinarie che contribuiscono attivamente a produrre l'inviluppo ipercaotico, ovvero il famoso numero N che avevamo visto in precedenza. Non solo: il dominio della frequenza è in grado di restituire anche il numero degli esponenti positivi di Ljapunov, cioè quali e quanti sistemi oscillanti attivi simultaneamente siano effettivamente caotici e quanto essi interagiscano fra di loro; spesso si riesce anche a capire quale sia quello “dominante” rispetto agli altri.

Per l'osservazione nel dominio della frequenza si userà lo stesso nodo indicato da Blakely per l'osservazione nel dominio del tempo, ossia l'ingresso

della terminazione lineare presente a sinistra, cioè l'ingresso non invertente dell'operazionale U1A, vedi fig.2.1.21. Mantenendo costante il valore di R1 e variando solo il numero delle celle LC del modello di linea collegate in serie osserviamo nel dominio della frequenza quanto riportato in fig.2.1.24.

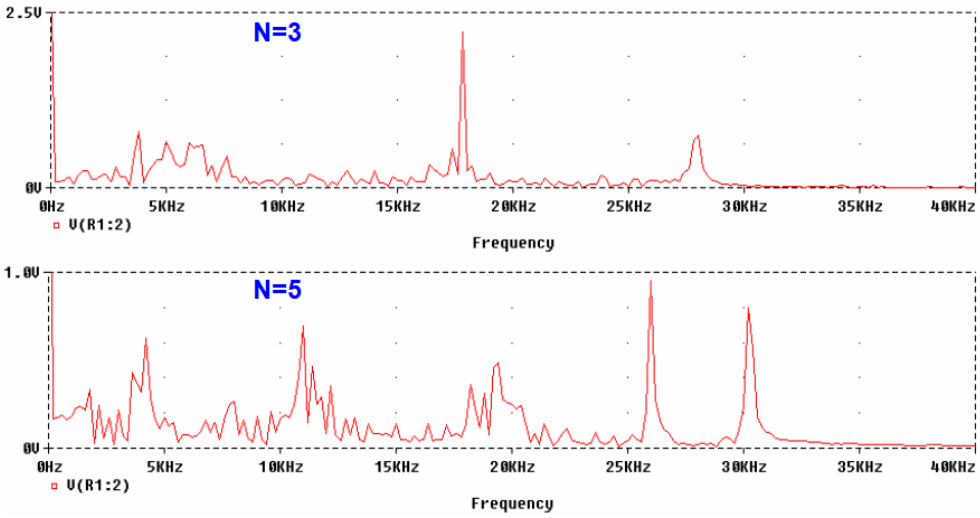

Fig.2.1.24 Simulazioni nel dominio della frequenza per N=3 e per N=5

Nella condizione in cui $N=3$ sono presenti tre distinti inviluppi di ampiezze diverse distribuiti lungo l'asse delle frequenze; i primi due sono effettivamente caotici, il terzo invece no. Si osserva che non si tratta di "armoniche", ovvero di prodotti armonici, perché le frequenze centrali non sono fra loro multipli o sottomultipli l'una dell'altra; inoltre si osserva anche che il primo inviluppo caotico, quello a frequenza più bassa, è distribuito su uno spettro più ampio rispetto al secondo inviluppo caotico che invece ha una maggiore ampiezza ma si allarga su uno spettro molto più contenuto. Ebbene questo secondo inviluppo rappresenta quello "dominante" (o master), mentre quello a frequenza più bassa sarebbe quello che Baier e Sahle definiscono lo "slave", ovvero quello "dominato" dal master.

Nella condizione in cui $N=5$, invece, osserviamo la presenza di cinque distinti inviluppi, i primi tre sono caotici. Anche in questo caso è possibile distinguere un "master", quello di ampiezza maggiore, tuttavia in questo caso le ampiezze spettrali del "master" e dei due "slave" sono abbastanza simili, il loro contributo energetico è distribuito in modo più uniforme.

In fig.2.1.25, invece, possiamo osservare le distribuzioni spettrali nei casi in cui $N=4$ e $N=6$.

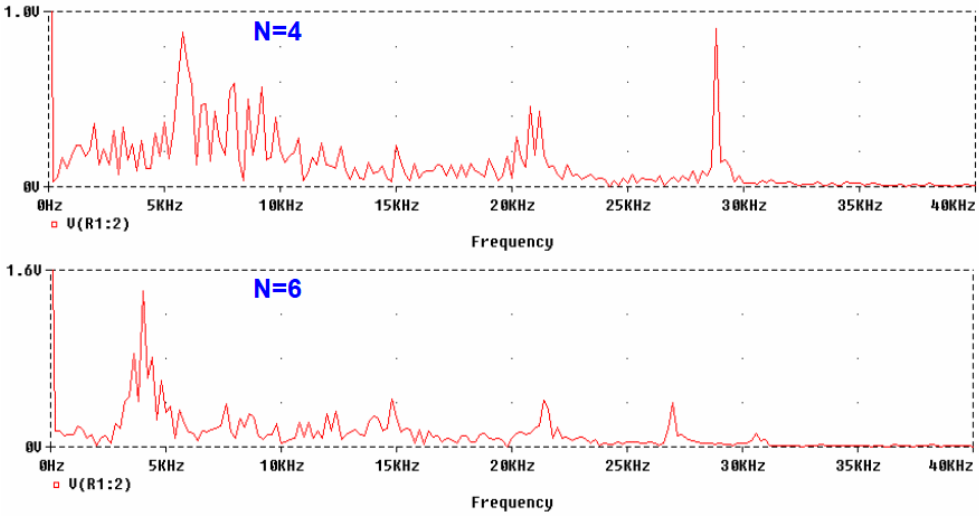

Fig.2.1.25 Simulazioni nel dominio della frequenza per N=4 e per N=6

Nel primo caso in cui $N=4$ si fa fatica a contare quattro inviluppi perché il secondo si trova molto vicino al "master" (circa 9kHz)che è posizionato stabilmente a una frequenza appena superiore ai 5kHz; l'ultimo a destra, quello a frequenza più alta, è sempre un tono singolo, non caotico (il classico ciclo limite, per cui l'esponente di Ljapunov è negativo).

Anche nel caso in cui $N=6$ il secondo inviluppo non è affatto evidente perché la sua scarsa energia si distribuisce su uno spettro molto ampio, in realtà esso ora si trova intorno ai 7-8kHz perché la frequenza dell'inviluppo "dominante" in tale contesto è diminuita mentre la sua ampiezza è incrementata sensibilmente. Come al solito gli ultimi due contributi, quelli a frequenza più alta, sono privi di comportamenti caotici.

Naturalmente all'aumentare di N aumentano di conseguenza anche il numero dei contributi spettrali caotici mentre la loro energia si distribuisce in maniera più o meno uniforme con una casistica che dipende sostanzialmente dal valore di VSWR, a sua volta impostato dal R1, cioè dalla terminazione $R=Z_L$. L'aggiunta della capacità all'inizio del modello di linea per

trasformare un sistema “odd” in un sistema “even” non inficia sui livelli energetici dell'intero sistema perché trattasi di un componente reattivo che non dissipa energia.

Osserviamo infine l'attrattore che produce il sistema ipercaotico a CPLM sviluppato da Blakely; per far questo si deve spostare il punto di misura della tensione ai capi della terminazione non lineare (ingresso invertente di U2A) e confrontarlo su un pano cartesiano con la corrente che scorre nel primo induttore posto all'estrema destra della rete LC; il risultato si può ammirare in fig.2.1.26.

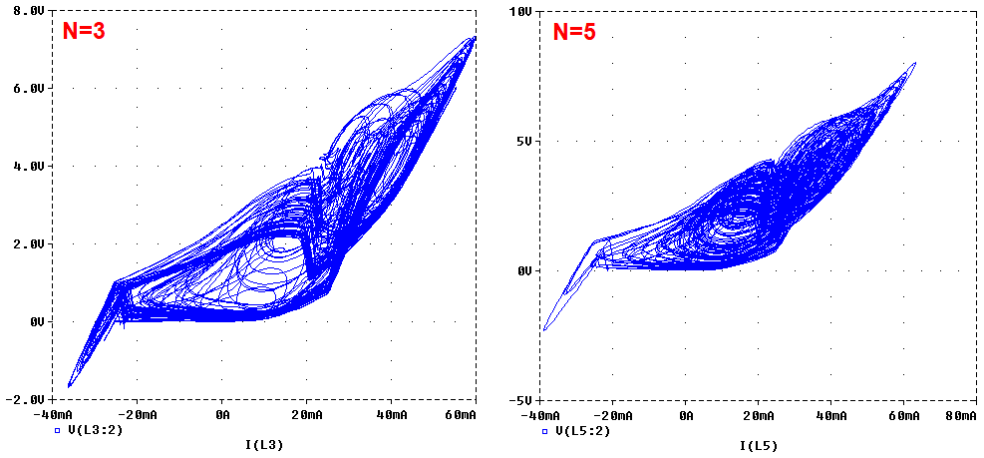

Fig.2.1.26 Attrattore del circuito di Blakely per N=3 e per N=5

La morfologia dell'attrattore così ottenuto, così come le orbite che si vengono a formare in uno spazio multidimensionale, sono notevolmente diverse da quelle di un attrattore di Rössler, ma anche di quelle di un simil-Rössler, nato dallo sviluppo di Elwalkil-Kennedy (vedi figg.1.1.7 e 1.1.8), e nemmeno di quelle che si possono ammirare in un GRS originale sviluppato da Baier e Sahle (vedi fig.2.1.5); per questo motivo ancora oggi si fa fatica a collegare il geniale circuito di Blakely al sistema originale di Rössler da cui prende il nome il GRS, ovvero il “Generic Rössler System”, nonostante l'indiscutibile compatibilità sia a livello analitico che a quello comportamentale, ma anche dai suoi legami stretti con le teorie di Ljapunov.

RIFERIMENTI E BIBLIOGRAFIA

BAIER G., SAHLE S.: "*Design of hyperchaotic flows*", Institute for Chemical Plant Physiology, University of Tübingen, Germany - Phys. Rev. E 51 (1995) R2712–R2714.

BERGER P. R., RAMESH A.: "*Negative Differential Resistance Devices and Circuits*", The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2011, Elsevier B.V..

BLAKELY J. N., CORRON NED J., PETHEL SHAWN D.: "*Equivalence of the continuum limit of the generalized Rössler system and the chaotic transmission line oscillator*", US Army RDECOM, AMSRD-AMR-WS-ST, Quantum Optics and Nonlinear Science, Redstone Arsenal, Alabama, USA, 2005.

BLAKELY J. N., CORRON NED J.: "*Multiplexing symbolic dynamics-based chaos communications using synchronization*", US Army RDECOM, AMSRD-AMR-WS-ST, Quantum Optics and Nonlinear Science, Redstone Arsenal, Alabama, USA, 2005.

CORRON NED J.: "*A Simple Circuit Implementation of a Chaotic Lorenz System*", Creative Consulting for Research and Education, 2010.

CORRON NED J., PETHEL SHAWN D., HOPPER BUCKLEY A.: "*A simple electronic system for demonstrating chaos control*", U.S. Army Aviation and Missile Command"; © American Association of Physics Teachers, 2004.

CRISTALLINI A.: "*Il Caos Deterministico*", AIF - XV Scuola di Storia della Fisica, Messina, 23 - 27 febbraio 2015.

DALFOVO F.: "*Oscillatori Onde e Caos*", Appunti di Fisica Generale I, Dipartimento di Fisica, Università di Trento, 2019.

ELWALKIL A. S., KENNEDY M. P.: "*Chaotic Oscillator Configuration Using a Frequency Dependent Negative Resistor*", Department of Electronic & Electrical Engineeting, University College Dublin, 1999.

GARCIA-LOPEZ J. H., JAIMES REÁTEGUI R., PISARCHIK A. N., MURGUÍA HERNANDEZ A., MEDINA GUTIÉRREZ C., VALDIVIA-HERNANDEZ R., VILLAFA-

NA-RAUDA E.: "*Novel communication scheme based on chaotic Rössler circuits*" © IOP Publishing Ltd., 2005.

HEGGER R., KANTZ H., SCHREIBER T.: "*Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*", Chaos, Vol.9 n.2, © 1999 American Institute of Physics.

KLEINSHMIDTH G.: "*A Rössler Attractor Circuit*", glenstuff.com, 2013.

LIU Y., PANG S., CHEN D.: "*An Unusual Chaotic System and its Control*" Elsevier Ltd., 2012.

MARGUÍA J. S., CAMPOS-CANTÓN E.: "*Wavelet analysis of chaotic time series*", Departamento de Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de San Luis Potosí S.L.P., México, 2005.

MEYER TH., BÜNNER M. J., KITTEL A., PARISI J.: "*An Approach to a Generalized Rössler System via Mode Analysis*", Physical Institute, University of Bayreuth, D-95440 Bayreuth Z. Naturforsch. 50 a, 1135-1138 (August 1995).

MINATI L.: "*Electronic networks of chaotic oscillators as physical models of some emergent phenomena in neural dynamics*", Instytut Fizyki Jądrowej, Polskiej Akademii Nauk, 2016.

RÖSSLER O. E.: "*An Equation for Continuous Chaos*", Physic Letters, 1976.

RÖSSLER O. E.: "*The Chaotic Hierarchy*", Zeitschrift für Naturforschung, 1983.

TAMAŠEVIČIUS A., MYKOLAITIS G., PYRAGAS V., PYRAGAS K.: "*A simple chaotic oscillator for educational purposes*" Semiconductor Physics Institute di Vilnius, Lithuania, 2004.

TREJO GUERRA M. C. RODOLFO: "*Design of Multi-Scroll Chaotic Oscillators*", National Institute of Astrophysics, Optics and Electronics, 2012.

ULANSKY V., RAZA A., OUN H.: "*Electronic Circuit with Controllable Negative Differential Resistance and its Applications*", MDPI, 2019.

XIN L., YONG C.: "*Generalized Projective Synchronization Between Rössler System and New Unified Chaotic System*", International Academic Publishers, 2007.